對四分位數間距計算方法的反思

林倬欣
香港中文大學校友會聯會陳震夏中學
梁子傑
退休中學教師

前言

近日，有學生跟筆者分享，指出某補習老師教授計算四分位數間距的方法與教科書的不同，而且他亦指出計算四分位數間距的方式共有 5 種。更重要的是，這 5 種方式似乎也獲得香港考試及評核局所認可和接納。本文旨在分析該 5 種計算方法，並指出該補習老師在片段中的一些問題。

引起關注的教學片段

該補習老師在其個人網誌（blog）和教學片段中提到（有興趣的讀者可以從參考文獻的網址收看完整的內容），根據 1996 年高級補充程度的數學及統計學第 1 題的評卷參考提到，香港考試及評核局接納以下 5 種計算四分位數間距的方法：

1996/Maths & Statistics/Q1a Marking Scheme 之節錄部分

New interquartile range = median of upper half – median of lower half

Alternate methods for finding interquartile ranges:

Interquartile range

i. $\frac{3}{4}\times 30$-th term $-\frac{1}{4}\times 30$-th term

ii. $\frac{3}{4}(30+1)$-th term $-\frac{1}{4}(30+1)$-th term

iii. $\frac{1}{4}(30\times 3+2)$-th term $-\frac{1}{4}(30+2)$-th term

iv. $\frac{1}{4}(29\times 3+4)$-th term $-\frac{1}{4}(29+4)$-th term

圖 1：1996 年評卷參考的節錄部分，圖片源自 Herman Yeung Blog

不合文法的數學符號

首先，筆者必須指出，在這位補習老師的 2 個教學片段及 blog 上的思路是正確的。可是，作為一個受過嚴謹數學訓練的數學老師，卻不能接受當中完全不合文法的數學符號。此等的表達形式容易引起混亂，令人混淆。如果考生在試卷上採用相類似的方式回答問題，恐怕負責評卷的閱卷員，難以為該考生給予任何的分數。

在教學片段中，該補習老師提供了一套數學公式來找出 Q_1、Q_2 和 Q_3 的位置。筆者一再強調，他計算位置的公式是沒有錯的，他自創的那句「4 捨 6 入 5 靠中」更是一絕（有興趣的讀者可以細心地研究一下）。不過，這是用來找出數據的位置，它絕對不等於數據本身的值。換言之，該補習老師在片段中寫 $Q_1 = \frac{1}{4}(12 + 1)$ 根本就是犯上文法上的錯誤！要知道，$\frac{1}{4}(12 + 1)$ 所計算的是數據的位置，而不是數據本身。Q_1 不能直接等於 $\frac{1}{4}(12 + 1)$，它應該等於相關位置上的數據！

舉一個簡單的例子，若學生在三角學一課這樣作答：

> 問：若 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 且 $0° \le \theta \le 90°$，求 θ 的值。
>
> 答：$\sin\theta = \frac{1}{2} = 30°$

相信同工們也不可能接受這種作答模式吧！因此為了破除誤會，學生在作答時，應寫 Q_1 的位置 $= \frac{1}{4}(12 + 1)$，然後再寫 $Q_1 =$ 「真實數值」。這正如學生寫 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 之後，絕不可立刻寫 $\frac{1}{2} = 30°$，而是要分行寫 $\theta = 30°$ 的道理完全一樣。

順帶一提，該補習老師在片段中寫了「$\frac{2^{nd} + 3^{rd}}{2} = \cdots$」，當中的文法也值得商榷。參考不同的教科書寫法後，我們應該寫為「第 2 項及第 3 項的中位數」。同工們在教學時也必須向學生指出這一點。

真的有 5 種答案嗎？

下一個問題是，究竟利用這 5 個方法，是否真的出現 5 組不同的 Q_1、Q_2 和 Q_3 呢？這個答案當然是肯定的！不過，筆者發現，在過去的考試題目中，考評局似乎做了一些安排，令答案不致完全失控。為方便以下討論，筆者先把圖 1 中的各種方式命名。

方法 1：

四分位數間距 ＝ 上半部分數據的中位數 − 下半部分數據的中位數

方法 2：

四分位數間距 ＝ 第 $\frac{3}{4}\times n$ 項 − 第 $\frac{1}{4}\times n$ 項

方法 3：

四分位數間距 ＝ 第 $\frac{3}{4}\times (n+1)$ 項 − 第 $\frac{1}{4}\times (n+1)$ 項

方法 4：

四分位數間距 ＝ 第 $\frac{1}{4}\times (3n+2)$ 項 − 第 $\frac{1}{4}\times (n+2)$ 項

方法 5：

四分位數間距 ＝ 第 $\frac{1}{4}\times (3n+1)$ 項 − 第 $\frac{1}{4}\times (n+3)$ 項

Stem (tens)	Leaf (units)
1	0
2	
3	0 2
4	4 5 8 9
5	0 1 2 6 8 8 9 9
6	2 3 3 5 5 8
7	1 2 2 4 4 4
8	2 5
9	1

圖 2：1996 年高級補充程度的數學及統計學第 1 題中的幹葉圖

圖 2 顯示 1996 年高級補充程度的數學及統計學第 1 題中的幹葉圖。若利用以上的 5 種方法，得出的四分位數間距分別如下：

方法	Q_3	Q_1	四分位數間距
1	Q_3 的位置 = 23 （取第 23 項） Q_3 = 72	Q_1 的位置 = 8 （取第 8 項） Q_1 = 50	72 – 50 = 22
2	Q_3 的位置 = 22.5 （第 22 及 23 項中位數） Q_3 = 71.5	Q_1 的位置 = 7.5 （第 7 及 8 項中位數） Q_1 = 49.5	71.5 – 49.5 = 22
3	Q_3 的位置 = 23.25 （取第 23 項） Q_3 = 72	Q_1 的位置 = 7.75 （取第 8 項） Q_1 = 50	72 – 50 = 22
4	Q_3 的位置 = 23 （取第 23 項） Q_3 = 72	Q_1 的位置 = 8 （取第 8 項） Q_1 = 50	72 – 50 = 22
5	Q_3 的位置 = 22.75 （取第 23 項） Q_3 = 72	Q_1 的位置 = 8.25 （取第 8 項） Q_1 = 50	72 – 50 = 22

上表的計算中，Q_1 和 Q_3 的位置是經過「4 捨 6 入 5 靠中」的調整的，而所得的四分位數間距都等於 22。若有讀者翻查當年的評卷參考，大概會發現以上答案跟考評局的答案並不相同。考評局的答案應該是按照中三學過的分點公式（Section formula）而計算出來的。

那麼，近年的香港中學文憑考試題目，又會否出現具爭議性的答案呢？以 2021 年香港中學文憑考試卷一的第 9 題為例，利用以上 5 個方式，得出的四分位數間距分別如下：

方法	Q_3	Q_1	四分位數間距
1	Q_3 的位置 = 60.5 （第 60 及 61 項中位數） Q_3 = 26	Q_1 的位置 = 20.5 （第 20 及 21 項中位數） Q_1 = 24	26 – 24 = 2

方法	Q_3	Q_1	四分位數間距
2	Q_3 的位置 = 60 （取第 60 項） Q_3 = 26	Q_1 的位置 = 20 （取第 20 項） Q_1 = 24	26 – 24 = 2
3	Q_3 的位置 = 20.75 （取第 61 項） Q_3 = 26	Q_1 的位置 = 20.25 （取第 20 項） Q_1 = 24	26 – 24 = 2
4	Q_3 的位置 = 60.5 （第 60 及 61 項中位數） Q_3 = 26	Q_1 的位置 = 20.5 （第 20 及 21 項中位數） Q_1 = 24	26 – 24 = 2
5	Q_3 的位置 = 60.25 （取第 60 項） Q_3 = 26	Q_1 的位置 = 20.75 （取第 21 項） Q_1 = 24	26 – 24 = 2

從以上的例子可以看到，不論是哪一種方法，得出的四分位數間距同樣相同。細心的讀者可能會發現，在 2021 年的題目當中，上四分位數及下四分位數更是相同的，或許是香港考評局汲取了 1996 年的教訓吧！畢竟作為一個每年一度的大型考試，即使是最終答案相同，可是其中的步驟有些微的不同，大概當年也引起了不少老師及同學的疑問。所以，在 1996 年後，若要問及四分位數間距，所有的數據也不再以幹葉圖表示，而是利用棒形圖，且每個數據的頻數也不少。因此，無論同學們利用哪個方法，得出的 Q_1 和 Q_3 也是相同的，自然免卻很多的爭議。

反思及總結

大家應該明白，統計學並非一門完全客觀的科學，當中有一些術語和定義，難免地帶有一點主觀的成分。本文談及的四分位數間距，便是其中之一。我們為何要引入四分位數間距？為何要將整體數據分成 4 份（而非 3 份或 5 份）？計算出來是結果又是否能夠完全達到引入這個定義的目的？細心想想便會明白，四分位數間距並非完全客觀這事實。也正因如此，我們對發展出多種計算四分位數間距的方式（因而引致不同的答案），應該不會感到驚訝。問題是，作為一個高風險大型公開考試中的一個課題，在四方八面的呼聲都要尋求一個一致又公正的評核準則之下，我們是否繼續容許有多種計算四分位數間距的方式存在？

筆者相信，這個問題由來已久，但一直以來卻鮮有教師提出來討論。難道以後的考試，我們仍然依賴考評局在出題時作出遷就，避免爭議？

參考文獻

Herman Yeung. (2023, Jan 03). *DSE 數學 D 天書 – 第 4 堂 08.* YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=DDVPBefXzm0&ab_channel=HermanYeung

Herman Yeung. (2023, Jan 03). *DSE 數學 D 天書 – 第 4 堂 09*. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=WQIFEIVZljk&ab_channel=HermanYeung

Herman Yeung. (2017, April 30). Interquartile Range 四分位數間距 多種 accept 方法之證據. Interquartile range 四分位數間距 多種 accept 方法之證據. https://hermanutube.blogspot.com/2017/04/interquartile-range-accept.html

作者電郵： lamcheukyan79@gmail.com
jckleung@netvigator.com