希羅公式的變形

張　贇
退休中學教師

問題

已知一個三角形的三邊長，如何求這個三角形的面積？可以說這是一個既簡單又不簡單的問題。如果這個三角形是直角三角形，那麼面積簡單易行；如果這個三角形的三邊長是有理數或正整數，那麼用希羅公式（Heron's Formula）可以輕鬆獲得三角形面積；如果三角形的三邊長至少一條邊長是平方根（$\sqrt{n}$，n 為正整數），那麼計算面積就比較麻煩。如何求得邊長為 $a=\sqrt{3}$、$b=2$、$c=\sqrt{5}$ 的三角形的面積？儘管可以算，但運算量比較大，對於這類三角形，有沒有一種較簡單的計算面積方法呢？本文就來討論這個問題。

希羅公式的變形

定理　設三角形三邊長為 $a=\sqrt{x+y}$、$b=\sqrt{y+z}$、$c=\sqrt{z+x}$，其中 x、y、z 是正實數，那麼這個三角形的面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}$。

證明

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})，$$

$$s-a = \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1}{2}(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}-\sqrt{x+y})，$$

$$s-b = \frac{1}{2}(a+c-b) = \frac{1}{2}(\sqrt{x+y}+\sqrt{z+x}-\sqrt{y+z})，$$

$$s-c = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}-\sqrt{z+x})，$$

所以

$$\begin{aligned} s(s-a) &= \frac{1}{4}[(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2-(\sqrt{x+y})^2] \\ &= \frac{1}{4}[(y+z)+2\sqrt{(y+z)(z+x)}+(z+x)-(x+y)] \\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{(y+z)(z+x)}+z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s-b)(s-c) &= \frac{1}{4}[\sqrt{x+y}-(\sqrt{y+z}-\sqrt{z+x})][\sqrt{x+y}+(\sqrt{y+z}-\sqrt{z+x})]\\ &= \frac{1}{4}[(\sqrt{x+y})^2-(\sqrt{y+z}-\sqrt{z+x})^2]\\ &= \frac{1}{4}[(x+y)-(y+z)+2\sqrt{(y+z)(z+x)}-(z+x)]\\ &= \frac{1}{2}[\sqrt{(y+z)(z+x)}-z]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(s-a)(s-b)(s-c) &= \frac{1}{4}[\sqrt{(y+z)(z+x)}+z][\sqrt{(y+z)(z+x)}-z]\\ &= \frac{1}{4}[(y+z)(z+x)-z^2]\\ &= \frac{1}{4}(yz+zx+xy)\end{aligned}$$

最後由希羅公式得

$$\begin{aligned}\text{三角形面積} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(yz+zx+xy)}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}\end{aligned}$$

應用

例一　本文開頭提出的問題：求邊長為 $a=\sqrt{3}$ 、$b=2$、$c=\sqrt{5}$ 的三角形的面積。

解　因為 $a=\sqrt{3}$ 、$b=2$、$c=\sqrt{5}$ ，

所以 $x+y=3$、$y+z=4$、$z+x=5$。

求得 $x=2$、$y=1$、$z=3$。

$$\begin{aligned}\text{三角形面積} &= \frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3+2+6}\\ &= \frac{\sqrt{11}}{2}\text{。}\end{aligned}$$

例二　已知 ΔABC 的三邊長為 $a=\sqrt{3}$、$b=\sqrt{5}$、$c=\sqrt{7}$，求 ΔABC 的面積。

解　記 $x+y=3$、$y+z=5$、$z+x=7$，

求得 $x=\frac{5}{2}$、$y=\frac{1}{2}$、$z=\frac{9}{2}$。

$$\Delta ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\times\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{59}}{4}。$$

總結

如果一個三角形的三條邊中至少有一條邊是平方根，本文給出了求其面積的一種較簡單方法。進一步地，我們自然要問：若一個三角形的三邊長中至少有一條是三次或三次以上的算術根時，如何快捷地求出這個三角形的面積？這是一個值得我們思考的問題。

參考文獻

教育局（2017）。《數學課程及評估指引（中四至中六）》。課程發展議會與香港考試及評核局聯合編訂。

作者電郵： yunzhangmath@126.com