三角形線分比的關係

梁子傑
退休中學教師

某年在日本東京旅遊，隨意走進一間書店，發現一本當地「名師」所著的數學輔導教材（見圖 1）[1]。在好奇心驅使下，決定買回家閱讀[2]。閱畢全書，發覺當地高中的數學課程雖然與香港的稍有分別，但大致來說，全部內容都算認識，亦能理解。不過，當中有一個段落，直譯為「三角形線分比的關係」，卻有點陌生，須花好一段時間，才能弄清楚和明白它的含意和用處。以下是筆者經過多年反覆思考和研究之後，整理出來的結果，希望各讀者指正。



圖 1

三角形線分比的關係

定理　如圖 2，在 ΔABC 中，Q、R 和 S 分別為 BC、AC 和 AB 上的點，且 AQ、BR 和 CS 三線共點於 P。

若　$AS : SB = m : \ell$ 且
　　$AR : RC = n : \ell$，
則　$BQ : QC = n : m$，
　　$AP : PQ = (m+n) : \ell$，
　　$BP : PR = (\ell+n) : m$ 及
　　$CP : PS = (\ell+m) : n$。

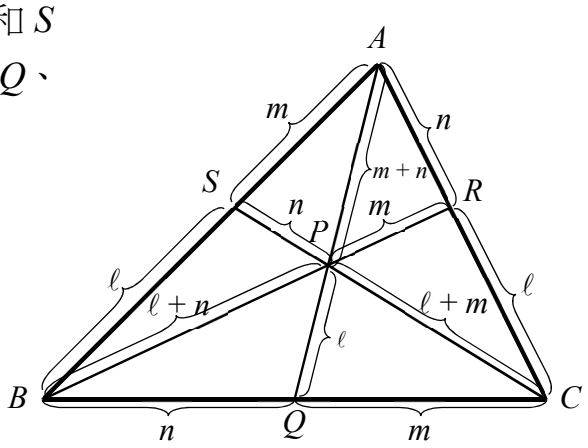

圖 2

1　桜井進（2016）。《みんなのセンター教科書　数学 I·A〔改訂版〕》。東京：旺文社。

2　筆者對日文全無認識，能夠閱讀該書，純粹因為書中大部分數學用詞都以日文漢字寫出，而且大多數詞彙都與中文相同。

初看之下，圖 2 似乎有點混亂，難以讀懂。再看，又覺得圖中所標示的長度漂亮得來有點不實用。譬如圖中左邊的 AS：SB 等於 m：ℓ，右邊的 AR : RC 等於 n : ℓ，而中間的 AP : PQ 則等於 $(m + n)$: ℓ，這是一個多麼巧妙的情況！不過，這裡要求 SB 的長度和 RC 的長度同時要等於 ℓ，又似乎不能夠應用於一般的情況，那麼這條定理豈不是有點不設實際？

另一個令人感到迷惘的原因，當然是書中並沒有為此定理作出任何證明。不過，這一點是可以理解的。雖然這本書名為「教科書」，但實際上應該是供學生應付公開考試的「試前溫習」。為了濃縮內容，只為學生提供有效的溫習材料，刪去定理的證明（即與考試無關的內容），也是無可厚非。可是，對於我來說，卻增加了瞭解這定理的難度。

幸運地，在閱畢這書一段時間之後，某一天突然想起，定理中的 ℓ 並非 SB 或 RC 的真實長度，它只是長度之比的一部分！即是說，即使在給定的 ΔABC 中，SB 和 RC 所對應的數字並不相等（例如：左右兩邊的比分別為 $AS : SB = 1 : 2$ 和 $AR : RC = 2 : 3$），我們總可以通過「擴分」，把 SB 和 RC 所對應的數字變成相同，從而得出相同的 ℓ （由 $AS : SB = 1 : 2 = 3 : 6$ 和 $AR : RC = 2 : 3 = 4 : 6$ 可知，ℓ 應該等於 6；或者嚴格地說，ℓ 的真實長度為 $6k$，其中 k 為比例常數）。事實上，在原書中，作者是有提及這個做法的，只不過在最初閱讀的時候，忽略了這一點。

當想通了這點之後，又刺激起我研究這定理的興趣，並找到兩個不同的證明。

證明一：構作平行線與相似三角形

定理的重點是從已知條件 AS : SB = m : ℓ 與及 AR : RC = n : ℓ，計算 BQ : QC 和 AP : PQ 的值。如果所求的線段分別藏於兩個相似三角形之內，那麼可以利用三邊成比例的結果推算有關的比值。可是，從圖 2 可見，圖中並沒有相似三角形，那麼便要透過構作平行線來建立相似三角形了。

如圖 3，UV 是一條平行於 BC 並且通過 A 的直線。亦不妨設 U 為該直線與 CS 延線的交點，而 V 則為該直線與 BR 延線的交點。為方便討論，記 BQ : QC 為 x : y，AP : PQ 為 a : b 及 UA : AV 為 c : d。由於 UV // BC，圖中一共出現了 4 對相似三角形，它們分別為 $\Delta AUS \sim \Delta BCS$、$\Delta AVR \sim \Delta CBR$、$\Delta AUP \sim \Delta QCP$ 和 $\Delta AVP \sim \Delta QBP$（A.A.A.）。

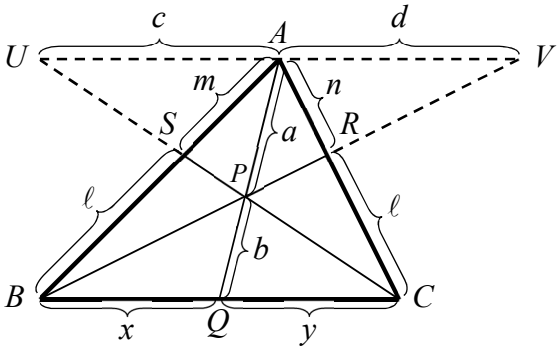

圖 3

由 $\Delta AUS \sim \Delta BCS$ 得 $\quad \dfrac{c}{x+y} = \dfrac{m}{\ell}$

由 $\Delta AVR \sim \Delta CBR$ 得 $\quad \dfrac{d}{x+y} = \dfrac{n}{\ell}$

兩式相除，得 $\quad \dfrac{c}{d} = \dfrac{m}{n}$ .....(1)

由 $\Delta AUP \sim \Delta QCP$ 得 $\quad \dfrac{c}{y} = \dfrac{a}{b}$

由 $\Delta AVP \sim \Delta QBP$ 得 $\quad \dfrac{d}{x} = \dfrac{a}{b}$

兩式相除，得 $\quad \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{x}{y} = 1$ .....(2)

結合 (1) 和 (2)，得 $\quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{d}{c} = \dfrac{n}{m}$

即 $\quad BQ : QC = n : m$。

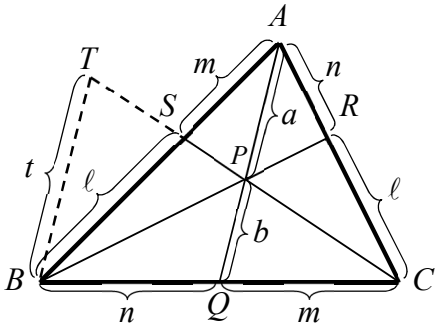

圖 4

圖 4 中，BT 是一條平行於 AQ 並且通過 B 的直線。亦不妨設 T 為該直

線與 CS 延線的交點。由於 $BT // AQ$，圖中一共出現了兩對相似三角形，它們分別為 $\Delta CPQ \sim \Delta CTB$ 和 $\Delta SAP \sim \Delta SBT$。又為了方便討論，記 $PQ : TB$ 為 $b : t$。留意，前面已經證明了 $BQ : QC = n : m$。

由 $\Delta CPQ \sim \Delta CTB$ 得 $\quad \dfrac{t}{b} = \dfrac{m+n}{m}$

由 $\Delta SAP \sim \Delta SBT$ 得 $\quad \dfrac{t}{a} = \dfrac{\ell}{m}$

兩式相除，得 $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{m+n}{\ell}$

即 $\quad AP : PQ = (m+n) : \ell$。

類似地，可證得 $BP : PR = (\ell + n) : m$ 及 $CP : PS = (\ell + m) : n$（定理得證）。

證明二：利用三角形面積之比與底邊之比的關係

在寫出第二個證明之前，先要證明兩條重要的引理。

引理 1　在 ΔABC 中，若 D 為 BC 上一點，則 $\dfrac{\Delta ABD \text{ 的面積}}{\Delta ADC \text{ 的面積}} = \dfrac{BD}{DC}$。

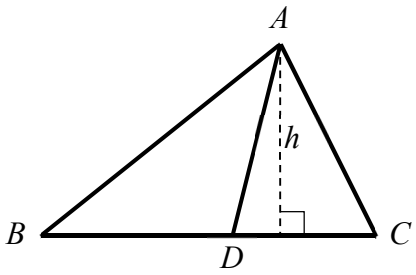

圖 5

證明　設 h 為 ΔABD 和 ΔADC 的高（見圖 5）。

則 $\dfrac{\Delta ABD \text{ 的面積}}{\Delta ADC \text{ 的面積}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times BD \times h}{\frac{1}{2} \times DC \times h} = \dfrac{BD}{DC}$（引理得證）。

引理 2　在 ΔABC 中，若以 A 作為三角形的頂點，Q 為底邊 BC 上一點，P 為 AQ 上一點，則 $\dfrac{\Delta ABP \text{ 的面積}}{\Delta APC \text{ 的面積}} = \dfrac{BQ}{QC}$。

證明　記 ΔABP 的面積為 H，ΔAPC 的面積為 K。又設 $BQ : QC = x : y$。把

引理 1 應用於 ΔPBC 之上，得 $\dfrac{\Delta PBQ\text{的面積}}{\Delta PQC\text{的面積}} = \dfrac{x}{y}$，由此可設 ΔPBQ 的面積 $= xg$，ΔPQC 的面積 $= yg$，其中 g 為比例常數（見圖 6）。

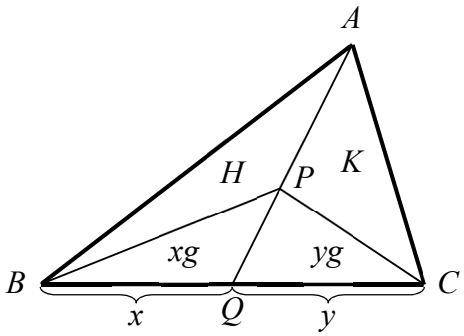

圖 6

把引理 1 應用於 ΔABC 之上，得

$$\frac{H+xg}{K+yg} = \frac{x}{y}$$

交叉相乘，得 $yH + xyg = xK + xyg$

消去兩邊的 xyg，得 $yH = xK$

兩邊同時除以 yK，得 $\dfrac{H}{K} = \dfrac{x}{y}$

即 $\dfrac{\Delta ABP\text{的面積}}{\Delta APC\text{的面積}} = \dfrac{BQ}{QC}$（引理得證）。

引理 1 可算是關於三角形面積之比和底邊之比最基礎的定理，相信老師和學生都會認識。引理 2 則是證明目前定理的一個重要關鍵。

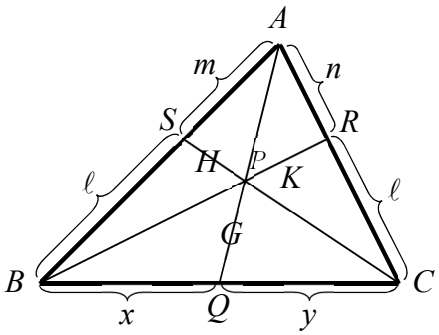

圖 7

同樣，記 ΔABP 的面積為 H，ΔAPC 的面積為 K。又記 ΔPBC 的面積為 G。設 $BQ : QC = x : y$（見圖 7）。

以 B 作為三角形的頂點，由引理 2 可得 $\dfrac{H}{G} = \dfrac{n}{\ell}$

以 C 作為三角形的頂點，由引理 2 可得 $\dfrac{K}{G} = \dfrac{m}{\ell}$

把兩式相除，便可得到 $\dfrac{H}{K} = \dfrac{n}{m}$

又以 A 作為三角形的頂點，由引理 2 可得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{H}{K} = \dfrac{n}{m}$

即 $BQ : QC = x : y = n : m$。

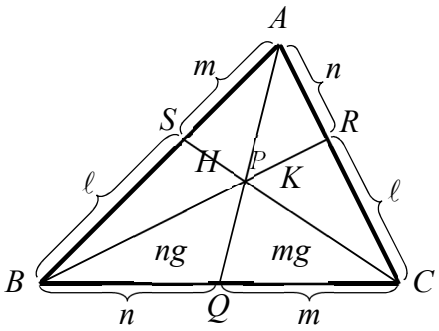

圖 8

既然 $BQ : QC = n : m$，那麼由引理 1，可設 ΔPBQ 的面積 $= ng$ 及 ΔPQC 的面積 $= mg$，其中 g 為比例常數（見圖 8）。

以 B 作為三角形的頂點，由引理 2 可得 $\dfrac{H}{ng+mg} = \dfrac{n}{\ell}$

抽出公因子 g，得 $\dfrac{H}{g(n+m)} = \dfrac{n}{\ell}$

兩邊同時乘以 $\dfrac{m+n}{n}$，得 $\dfrac{H}{ng} = \dfrac{m+n}{\ell}$

即 $\dfrac{\Delta ABP \text{的面積}}{\Delta PBQ \text{的面積}} = \dfrac{m+n}{\ell}$

把引理 1 應用於 ΔBAQ 之上，得 $AP : PQ = (m+n) : \ell$。

類似地，可證得 $BP : PR = (\ell + n) : m$ 及 $CP : PS = (\ell + m) : n$（定理得證）。

個人認為，兩個證明各有千秋，既能解釋定理成立的原因，亦能從不同觀點展示每組比之間互相牽動的關係，趣味盎然。

完成定理的證明之後，好應該看看如何應用它了。

一個應用

例 1　如圖 9，若 $AS : SB = 1 : 2$，$AR : RC = 2 : 3$，求 $BQ : QC$ 及 $AP : PQ$。

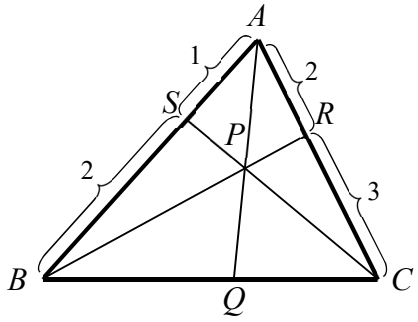

圖 9

解　$AS : SB = 1 : 2 = 3 : 6$

$AR : RC = 2 : 3 = 4 : 6$

與圖 2 比較，設 $\ell = 6k$、$m = 3k$ 及 $n = 4k$，其中 k 為比例常數。因此由圖 2 得

$$BQ : QC = n : m = 4k : 3k = \underline{\underline{4 : 3}}$$

且 $$AP : PQ = (m + n) : \ell = (3k + 4k) : 6k = \underline{\underline{7 : 6}}$$

應用線分比的關係，上述問題便可以輕鬆地解決。但假如我們不知道這個關係，那麼以我們目前的高中知識，可以怎樣解這個問題呢？

在這個情況之下，我們可以在圖中加入平行線和相似三角形，又或者利用三角形面積與底邊的關係來解題。演算步驟與前面提及的證明一和證明二相似，故不在此重複了。有興趣的讀者可以嘗試自行完成。

第三個方法是採用向量。首先以 **b** 和 **c** 分別表示 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$。由此得 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\mathbf{b}$ 且 $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{5}\mathbf{c}$。再設 $SP : PC = s : 1$，$BP : PR = r : 1$，則分別得 $\overrightarrow{AP} = \frac{\frac{1}{3}\mathbf{b} + s\mathbf{c}}{s+1}$ 和 $\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{b} + \frac{2}{5}r\mathbf{c}}{r+1}$。比較兩式中 **b** 和 **c** 的係數，得 $\frac{1}{3(s+1)} = \frac{1}{r+1}$ 和 $\frac{s}{s+1} = \frac{2r}{5(r+1)}$。將兩式相除得 $s = \frac{2}{15}r$。將結果代入上面其中一式，得 $r = \frac{10}{3}$。由此可知 $\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{b} + \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}\mathbf{c}}{\frac{10}{3}+1} = \frac{3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}}{13}$。

再設 $BQ : QC = h : 1$，則 $\overrightarrow{AQ} = \frac{\mathbf{b} + h\mathbf{c}}{h+1}$。又設 $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} = \frac{3k\mathbf{b} + 4k\mathbf{c}}{13}$。比較兩式中 **b** 和 **c** 的係數得 $\frac{3k}{13} = \frac{1}{h+1}$ 和 $\frac{4k}{13} = \frac{h}{h+1}$。由此解聯立方程，得 $h = \frac{4}{3}$ 和 $k = \frac{13}{7}$。最後得 $BQ : QC = \underline{\underline{4 : 3}}$，$AP : PQ = 7 : (13 - 7) = \underline{\underline{7 : 6}}$。

非常明顯，應用向量的方法步驟繁多，應用線分比的關係則非常簡潔。不單如此，個人認為，整個向量的計算過程都是相當「盲目地」進行的，即使求得正確答案，也未能明瞭那些數字之間的走向和關係。相反，應用線分比的關係則令人有一種一目了然的感覺，那些數字之間的變換、變化，顯然易見（見圖 10）！

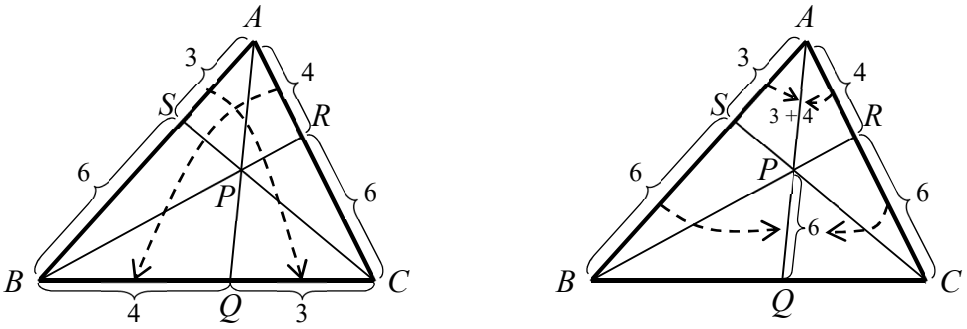

圖 10

話說回來，認識古典幾何學的朋友應該知道，在幾何學中，有兩條經典的定理可以用來解上述問題，以下就為大家回顧這兩條定理。

塞瓦定理與梅涅勞斯定理

塞瓦定理　在 ΔABC 中，Q、R 和 S 分別為 BC、AC 和 AB 上的點。若 AQ、BR 和 CS 三線共點於 P，則 $\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}\cdot\dfrac{AS}{SB}=1$。

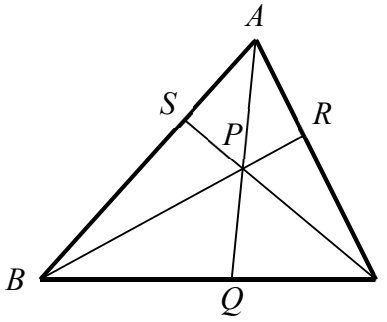

圖 11

塞瓦（Giovanni Ceva；1647 – 1734），意大利數學家。在 1678 年，出版了一本名為《直線論》（*De lineis rectis*）的書，介紹了這條定理，後世人稱之為「塞瓦定理」。

比較圖 2 和圖 11，明顯看到兩條定理的設定是完全相同的！事實上，當 $AS:SB=m:\ell$ 且 $AR:RC=n:\ell$ 時，由 $\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}\cdot\dfrac{AS}{SB}=1$ 可得

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{\ell}{n}\cdot\frac{m}{\ell}=1$$

即

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{n}{m}。$$

換言之，線分比關係中的第一個結果，其實就是塞瓦定理！因此，塞瓦定理亦可用前面的方法來證明。在前面的例 1 中，當知道 $AS : SB$ 與 $AR : RC$ 的值時，亦可以利用塞瓦定理求得 $BQ : QC$。具體計算就留給讀者來完成。

至於例題中 $AP : PQ$ 的值，則需要另一定理來處理。

梅涅勞斯定理　在 ΔABC 中，R 和 S 分別為 AC 和 AB 上的點。若延長截線 SR 使它與 BC 的延線相交於 Q（如圖 12），則 $\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}\cdot\dfrac{AS}{SB}=1$。

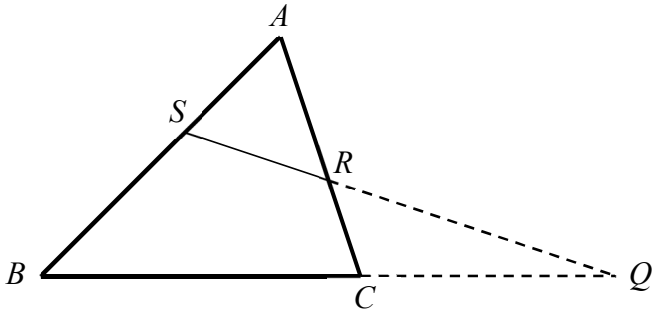

圖 12

梅涅勞斯（Menelaus of Alexandria；約 70 – 約 130）是其中一位把球面幾何學應用於天文學的古希臘數學家。他最出名的成就，就是提出了現時以他名字命名的「梅涅勞斯定理」[3]。

與前面的定理一樣，梅涅勞斯定理可以透過相似三角形來證明。不過，今次加入的，是垂直線而非平行線。

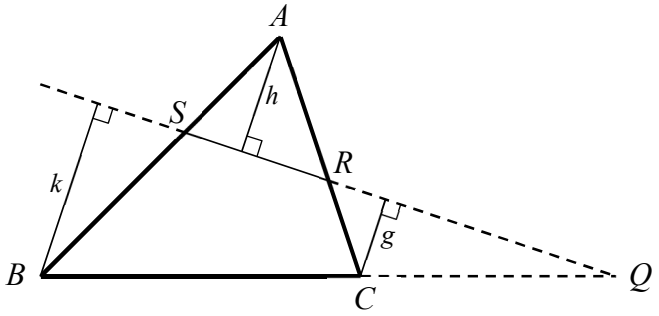

圖 13

3　"Menelaus" 一字有很多的中文翻譯，並不統一，例如：梅涅勞斯、梅內勞斯、門奈勞斯 … 等。亦有人將「梅涅勞斯定理」簡稱為「孟氏定理」。

在 ΔABC 中，我們從 A、B 和 C 三點向截線 SR 分別作三條垂直線，並且分別記這三條垂直線段的長度為 h、k 和 g（如圖 13）。

由相似三角形關係可知 $\frac{BQ}{QC}=\frac{k}{g}$，$\frac{CR}{RA}=\frac{g}{h}$ 與及 $\frac{AS}{SB}=\frac{h}{k}$。

將三式相乘便得到 $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AS}{SB} = \frac{k}{g}\cdot\frac{g}{h}\cdot\frac{h}{k} = 1$（定理得證）。

乍看之下，梅涅勞斯定理彷彿與目前討論的線分比關係沒有關聯。但只要大家將眼光改變一下，便會發現梅涅勞斯定理其實隱藏其中。

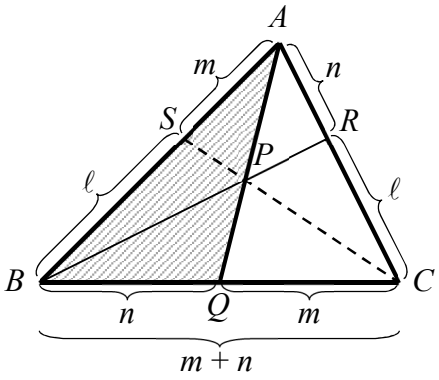

圖 14

圖 14 中，Q、R 和 S 如舊分別是 ΔABC 三邊上的點使得 AQ、BR 和 CS 三線共點於 P，並且 $AS : SB = m : \ell$ 及 $AR : RC = n : \ell$。由塞瓦定理可知 $BQ : QC = n : m$。這時候，我們視線段 SPC 為 ΔABQ 的截線，那麼根據梅涅勞斯定理，得

$$\frac{BC}{CQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AS}{SB} = 1$$

$$\frac{m+n}{m}\cdot\frac{PQ}{AP}\cdot\frac{m}{\ell} = 1$$

即

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{m+n}{\ell}。$$

這正是線分比關係第二部分的結果！

事實上，我們亦可以把梅涅勞斯定理應用於圖 9 之中，從而求得例 1 中 $AP : PQ$ 的值（同樣，具體計算就留給讀者來完成）。

不用多說，利用塞瓦定理和梅涅勞斯定理解題，的確比利用向量為佳。不過，對於初次接觸這兩條古典定理的朋友來說，命題中涉及 BQ、QC、CR、RA、AS 和 SB 六條線段長度，也真的有點嚇人。雖然它們的排列有一

點規律，而這規律亦易於記憶，但卻遠遠不及線分比的關係中只涉及 ℓ、m 和 n 三個變量來得簡單。有一點亦值得留意的是，例 1 要求同時計算 $BQ : QC$ 和 $AP : PQ$ 的值。如果題目只要求計算 $AP : PQ$，那麼我們可以從線分比的關係中直接求得這結果。但當使用這兩條古典定理時，我們就不可避免地要先求得 $BQ : QC$，然後才可以得到 $AP : PQ$，效率上就不及前者了。

更多例題

例 2　圖 15 中，E 為 CD 延線上一點，AD 與 BE 相交於 F。若 $AB = BC$ 且 $BF = FE$，求 $AF : FD$。

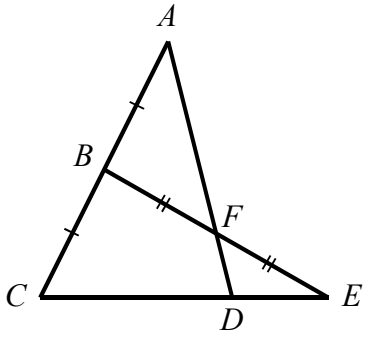

圖 15

留意，在圖 15 中，BE 是 ΔACD 的截線。由梅涅勞斯定理得 $\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DF}{FA}\cdot\frac{AB}{BC}=1$。

已知 $\frac{AB}{BC}=1$，所以得 $\frac{AF}{FD}=\frac{CE}{ED}$。因此若要求得 $AF : FD$，便要知道 $CE : ED$ 的值。可是，題目本身並沒有直接給出這個答案。

再看圖 15。我們仍未使用 $BF = FE$ 這條件。留意 BE 不單是 ΔACD 的截線，它也是 ΔECB 的一條邊。如果把 DA 視為 ΔECB 的截線，那麼由梅涅勞斯定理便可得 $\frac{CA}{AB}\cdot\frac{BF}{FE}\cdot\frac{ED}{DC}=1$。由於 $\frac{CA}{AB}=\frac{2}{1}$，$\frac{BF}{FE}=1$，因此 $\frac{ED}{DC}=\frac{1}{2}$。由此得 $\frac{CE}{ED}=\frac{ED+DC}{ED}=1+\frac{DC}{ED}=1+\frac{2}{1}=\frac{3}{1}$。最後得 $AF : FD = \underline{3 : 1}$。

換言之，對於例 2，須使用梅涅勞斯定理兩次，並要先求得 $CE : ED$，方可求得所需答案。至於利用線分比的關係又如何呢？

留意，如果把圖 15 中 A、E 兩點連結起來，所得的 ΔACE，結構上與圖 2 中的 ΔABC 相同（只是欠缺了連結 CF 並伸延至 AE 的線段）。我們可以按照圖 2 的結構，在圖 15 中對應的線段加上 ℓ、m、n、$\ell+n$ 和 $m+n$ 的記號，從而得圖 16。

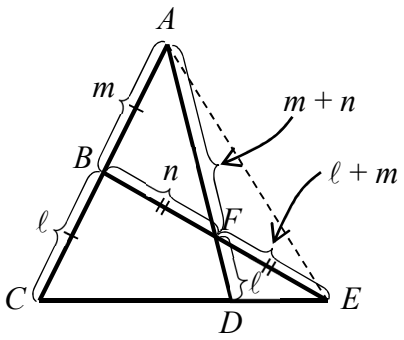

圖 16

由於 $AB = BC$，因此可以設 $m = \ell = k$，k 為比例常數。又因 $BF = FE$，得 $n = \ell + m = k + k = 2k$。最後，$AF : FD = (m + n) : \ell = (k + 2k) : k = \underline{3 : 1}$。

利用了線分比的關係，我們可以直接求得答案而毋須計算 $CE : ED$，這是多麼的巧妙和簡單！

例 3　圖 17 中，Q 和 R 分別為 BC 和 AC 上的點，且 AQ 與 BR 相交於 P。已知 ΔAPR、ΔABP 和 ΔBPQ 的面積分別為 30 cm^2、40 cm^2 和 20 cm^2，求四邊形 $PQCR$ 的面積。

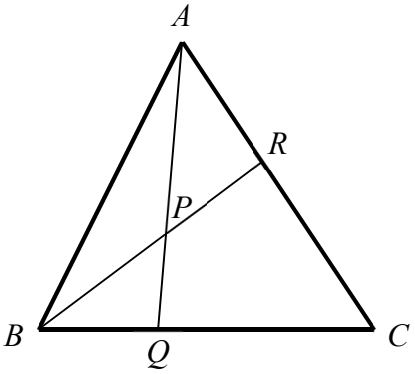

圖 17

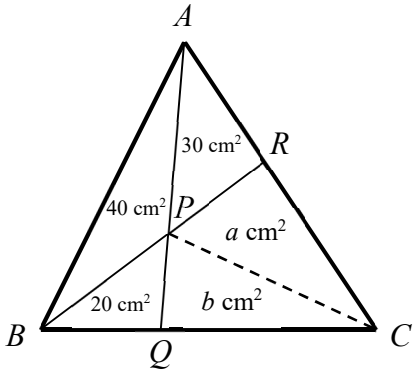

圖 18

我們也是先從傳統方法做起。

方法一　如圖 18，連結 PC 並設 ΔCPR 的面積為 a cm^2，又設 ΔCPQ 的面積為 b cm^2。把引理 1 同時應用在 ΔACQ 和 ΔABQ 之上，得

$$\frac{a+30}{b} = \frac{AP}{PQ} = \frac{40}{20} = 2$$

$$a + 30 = 2b$$

$$a = 2b - 30 \quad \text{.....(*)}$$

把引理 1 同時應用在 ΔCBR 和 ΔABR 之上，得

$$\frac{a}{b+20} = \frac{PR}{BP} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$4a = 3b + 60$$

把 (*) 代入上式，得 $4(2b - 30) = 3b + 60$

$$8b - 120 = 3b + 60$$

$$5b = 180$$

$$b = 36$$

由 (*) 得 $a = 2 \times 36 - 30$

$$= 42$$

$\therefore$ 四邊形 $PQCR$ 的面積 $= (42 + 36)\ \text{cm}^2$

$$= \underline{78\ \text{cm}^2}$$

方法二 如圖 19，連結 QR 並設 ΔPQR 的面積為 $x\ \text{cm}^2$，又設 ΔCQR 的面積為 $y\ \text{cm}^2$。

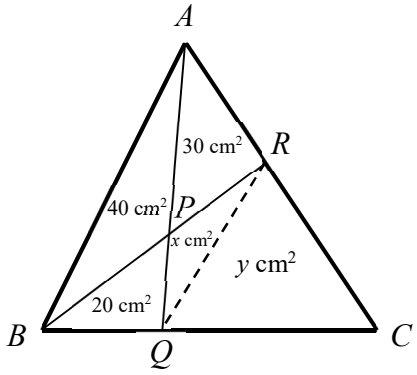

圖 19

把引理 1 同時應用在 ΔQBR 和 ΔABR 之上，得

$$\frac{x}{20} = \frac{PR}{BP} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

$$x = 15$$

又把引理 1 同時應用在 ΔRBC 和 ΔABC 之上，得

$$\frac{y}{20+15} = \frac{BQ}{QC} = \frac{y+15+30}{40+20}$$

$$\frac{y}{35} = \frac{y+45}{60}$$

$$12y = 7y + 315$$
$$y = 63$$

$\therefore$ 四邊形 $PQCR$ 的面積 $= (15 + 63)\ \text{cm}^2$
$= \underline{78\ \text{cm}^2}$

方法一須設定兩個未知數和解聯立方程，看似有點複雜。方法二則簡單一點，其中一個未知量可以直接求得，而毋須解方程。至於以線分比的關係又如何處理呢？方法會否更簡單一點呢？

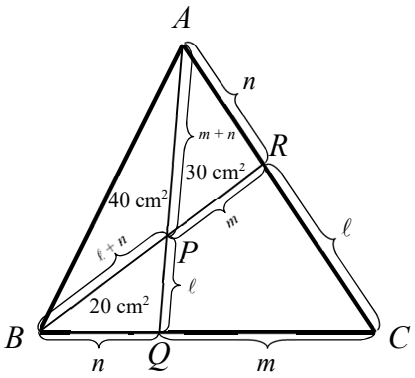

圖 20

按照圖 2 的設定，設 $BQ : QC = n : m$ 且 $AR : RC = n : \ell$（如圖 20）。
又由圖 2 可得 $AP : PQ = (m + n) : \ell$，$BP : PR = (\ell + n) : m$。

把引理 1 應用於 ΔBAQ 之上，得 $\dfrac{m+n}{\ell} = \dfrac{2}{1}$ .....(1)

把引理 1 應用於 ΔABR 之上，得 $\dfrac{\ell+n}{m} = \dfrac{4}{3}$ .....(2)

留意，(1) 和 (2) 兩式共有三個未知量，彷彿這個方程組比面前的傳統方法更難解！不過大家要一再留意，ℓ、m 和 n 的實際長度並不重要，我們要求的，是 $n : m$ 或 $\ell : n$ 的值。仔細觀察 (1) 和 (2) 兩式，留意兩式左方的分子和分母都包括 ℓ、m 和 n 三個數。事實上，將左方的分子和分母加起來，剛好等於 $\ell + m + n$。而將 (1) 式的右方加起來則等於 $2 + 1 = 3$，將 (2) 式的右方加起來則等於 $4 + 3 = 7$。即是說，一方面 $\ell + m + n = 3k_1$，另一方面 $\ell + m + n = 7k_2$，其中 k_1 和 k_2 為兩個比例常數。換言之，$\ell + m + n$ 既是 3 的倍數，又是 7 的倍數。由於 3 和 7 的最小公倍數（L.C.M.）等於 21，因此我們可以設 $\ell + m + n = 21k$，其中 k 為另一個比例常數。於是，

從 (1) 式得 $\ell = 21k \times \frac{1}{2+1} = 7k$

從 (2) 式得 $m = 21k \times \frac{3}{4+3} = 9k$

由此得 $n = 21k - 7k - 9k = 5k$

即 $n : m = 5k : 9k = 5 : 9$

又把引理 1 應用於 ΔABC 之上，得

$$\frac{\Delta ABQ \text{ 的面積}}{\Delta AQC \text{ 的面積}} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \quad \Delta AQC \text{ 的面積} = (40 + 20) \times \frac{9}{5}\ \text{cm}^2$$

$$= 108\ \text{cm}^2$$

最後， 四邊形 $PQCR$ 的面積 $= (108 - 30)\ \text{cm}^2$

$$= \underline{78\ \text{cm}^2}$$

原來，利用比的性質，我們毋須解任何方程，已足夠求得所需的面積。做法明顯比方法一好，亦比方法二稍為優勝。

總結

從日本數學課本中發現的「三角形線分比關係」其實是兩條古典幾何定理的匯合。將它用於解涉及三角形邊長、分點和比的問題，確實方便和有效率。縱使在香港的中學數學課程沒有明確地提及這定理，但它能解的習題，又不時會在香港公開考試的試卷之中出現（當中包括以向量包裝的平面幾何問題），因此亦值得向學生介紹。或者，長遠來說，將它引入課程之中，好讓香港的課程亦能夠媲美鄰近地區，亦相當合理。

後記：三點補充

1. 梅涅勞斯定理並非只是用來計算三角形中線段長度之比。它的逆定理其實提供了一個判斷三點共線的準則，即當 $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AS}{SB} = 1$ 時，圖 12 中 Q、R 和 S 三點會構成一條直線。我們可以利用這準則來證明射影幾何（projective geometry）中兩大基礎定理：帕普斯定理（Pappus Theorem）和笛沙格定理（Desargues Theorem）。可惜這些內容已超越本文的主旨，唯有按下不表。

2. 陸美蓮老師曾於視像分享網站分享她對質點（mass point）的研究。這計算方法其實與本文所介紹的三角形線分比定理有異曲同工的效果。但由於篇幅所限，再加上珠玉在前，亦無謂東施效顰，因此本文並沒有引述有關的內容。感興趣的讀者請閱讀陸老師的文章和影片[4]。

3. 正如文中所說，三角形線分比的關係與塞瓦定理有著密不可分的關係，它們的證明亦應大同小異。在本文中，筆者說他找到兩個不同證明三角形線分比關係的方法，並非表示這兩方法是筆者獨創的。事實上，只要能夠證明塞瓦定理的方法，理應可以用作證明三角形線分比的關係。潘維凱老師曾經發表過一篇文章，收集了他多位學生對塞瓦定理的證明。若讀者感到興趣，亦請參考潘老師的文章[5]。

作者電郵：jckleung@netvigator.com

4 陸美蓮（2023）。Enrichment Mathematics — 網上教室（節錄 三十九課 FINALE）。《數學教育》46 期（9/2023）。44 – 47 頁。香港數學教育學會。
影片網址：https://www.youtube.com/watch?v=uOHWWvaG9vI

5 POON Wai Hoi Bobby (2007). Several Proofs of Ceva's Theorem by Students. *EduMath* 25 (12/2007), pp. 76 – 82. HKAME.