課室剪影 — 讓學生自主地學習數學的執行與反思

邱澤霖
粉嶺救恩書院

於自主學習公開課，我開放了教授角錐體體積公式的中三級數學課堂，獲得觀課老師們及嘉賓的肯定，在此希望與讀者們分享教學計劃及實踐自主學習的心得。

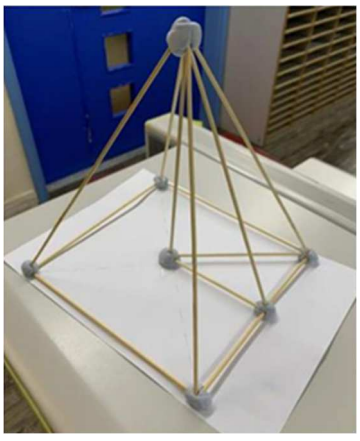
這一節數學課主要有三個教學目標，第一是讓同學們理解角錐體的體積公式，第二是令他們利用合適的直角三角形，找出角錐體的高，從而能夠計算體積。另外，我們也希望透過課堂，讓同學欣賞角錐體與角柱體體積的關係。

課前備課

上課前，同學們需先閱讀課本及完成導學案，認識與錐體相關的基本詞彙（如頂點、斜棱及斜高等），並與組員合作，製作錐體（圖一）及角錐體模型（圖二）。課前的備課及模型製作將在堂上大派用場。



圖一：錐體手作



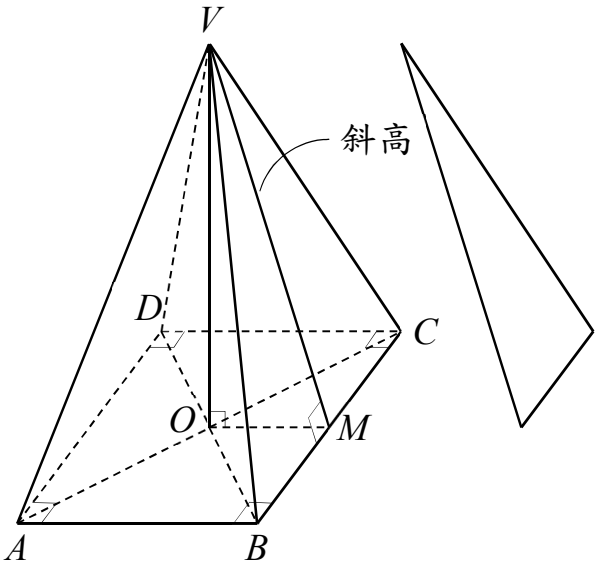
圖二：角錐體模型

導學

在課堂的開始，我們先邀請同學們大聲朗讀學習目標，並讓他們指出錐體各部分的名稱（圖三）。其後，我們讓同學辨認角錐體的直角，並標示在模型中。不少同學都能正確地標示直角（圖四），這也協助提升他們的空

間感及對錐體的理解。接下來，我們期望能透過活動幫助同學理解角柱體是角錐體體積的三倍。在第一個活動中，我們要求同學們用錐體去堆砌出正方體。經過一番探索，同學們都成功用三個錐體拼成一個正方體。在第二個活動，同學們透過影片，發現只要將角錐體容器的水倒進角柱體器皿三次，便可剛好填滿角柱體。在導學的最後，同學們能掌握計算角錐體體積的公式。

2. *VABCD* 是直立長方錐體。試寫出以下各部分的名稱所屬的標記。



頂點：*V*

高：*VO*

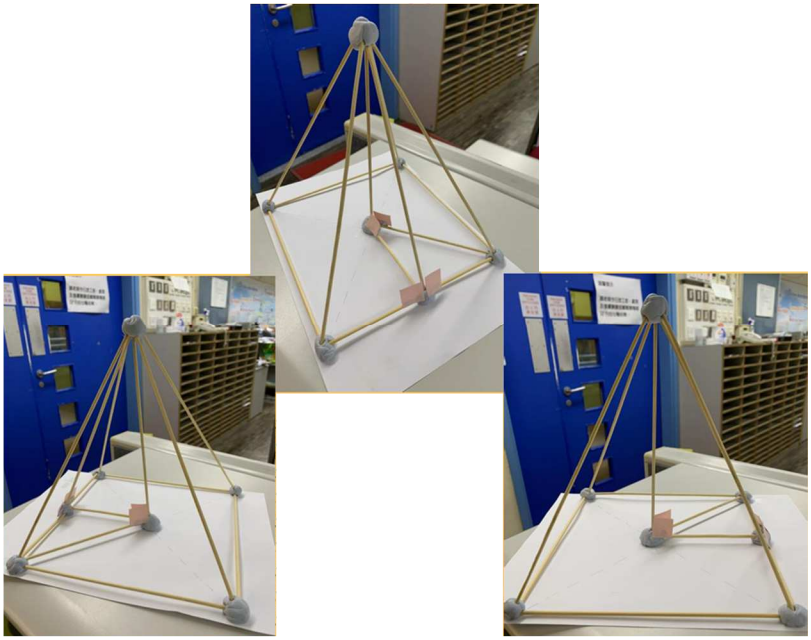
底：*ABCD*

斜棱：*VB*、*VC*、*VD*、*VA*

斜高：*VM*

直角三角形：Δ*VOM*、Δ*VOC*、Δ*VOB*、Δ*VOA*、Δ*VOD*、Δ*VMB*、Δ*VMC* 等

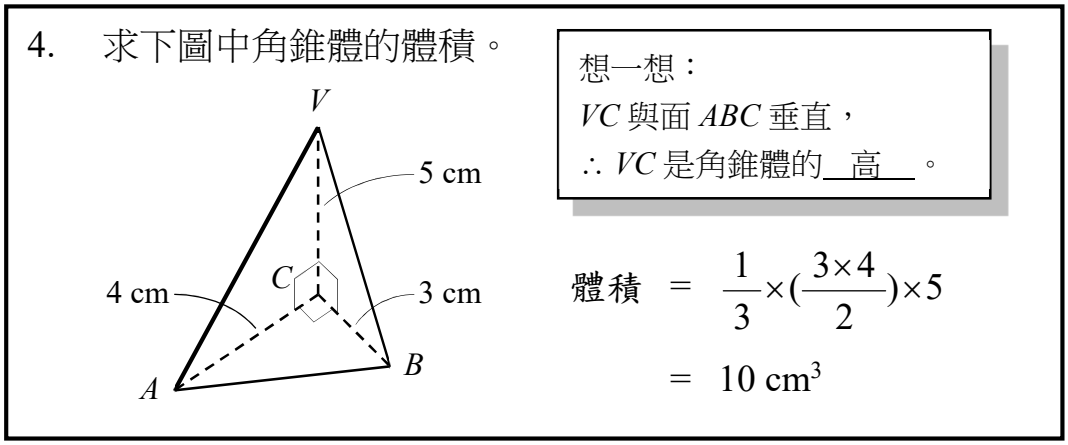
圖三：與錐體相關的基本詞彙



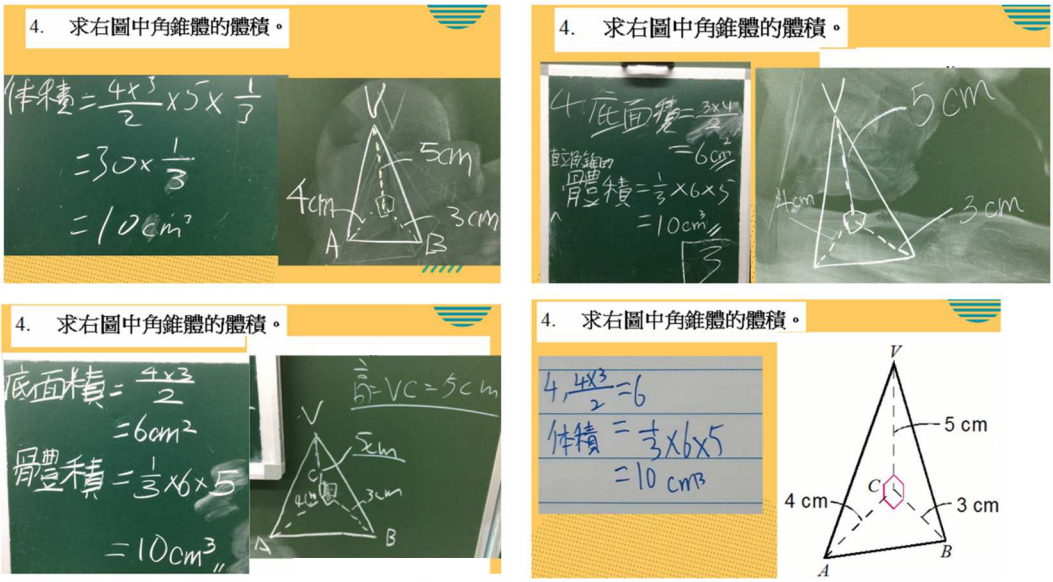
圖四：已標示直角的角錐體模型

備課展示

在導學案，我們設計了兩條題目給同學去完成。同學們於備課時完成題目，並在小組討論的過程中與組員分享解題步驟，看看當中步驟是否相似。當同學們有共識後，部份同學負責將答案寫在小黑板上，剩下同學則需為匯報而預備，與其他組的同學分享成果。當同學們忙著寫小黑板及準備匯報時，老師的角色便是觀察不同組別的作答，並詢問同學們的想法，從而了解他們對課目的掌握程度。第一條題目（圖五）的設計目的是讓同學們找出角錐體的高，並找出體積。在匯報的過程中，大部份同學指出 VC 是高（圖六）。同學們於匯報時，都能說出角錐體的體積公式，並辨認底面積及高，找出答案。當我嘗試問 VC 是不是角錐體唯一的高時，有些同學則指出 AC 及 BC 也是高。我藉此良機進行點撥，指出角錐體的高不一定只



圖五：備課展示的第一條題目



圖六：四組就著第一條題目的作答

有一條，可嘗試將圖像旋轉，對角錐體進行觀察。討論下一題之前，我也有使用思考慣性的「欣賞、好奇及建議」，邀請同學們就著四組的作答說出值得讚賞的地方，解題過程有沒有不清楚的部份，並指出一些可改善的地方。同學們欣賞大部份的習作都有畫圖、點題及寫單位，也能察覺部份組別分開計算底面積及體積，有部份組別則直接運用算式計算體積。

第二條題目（圖七）則是希望同學能看到角錐體裏的直角三角形，並利用畢氏定理求錐體的高及體積。經過早前尋找直角的訓練，大部份同學很快便觀察到 $\angle VOC$ 為一直角，並利用 ΔVOC 去解題。在匯報的過程中，同學們縱使有不同的答案，他們仍有自信地分享解題步驟。當我嘗試將組別的小黑板放在一起，讓同學們比較不同組別的步驟。部份同學能發現箇中錯處，例如是按錯了計算機及未取足夠有效數字作運算等。從觀察別人的習作，同學能培養驗算能力，減少錯誤的機會。當大部份同學都能跟上解答步驟時，我也邀請同學們用另一方法去求角錐體的高。有些同學能發現 ΔVEC 也是直角三角形（圖九），只要利用畢氏定理便可找到斜高 VE，而斜高也可幫助找到錐體的高，最終求得角錐體體積。

5. 圖中所示為直立角錐體 $VABCD$，其底 $ABCD$ 是一個邊長為 5 cm 的正方形，斜棱長 8 cm。
   (a) 求該角錐體的高 VD。
   (b) 求該角錐體的體積。

解題步驟（方法一）：
1. 運用角錐體的底（即下圖），以畢氏定理求 AC
2. $AO = OC$
3. 在 ΔVCO 中，運用畢氏定理求高 VO。

(a) $AC = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$（畢氏定理）

$OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{50}}{2}$ cm

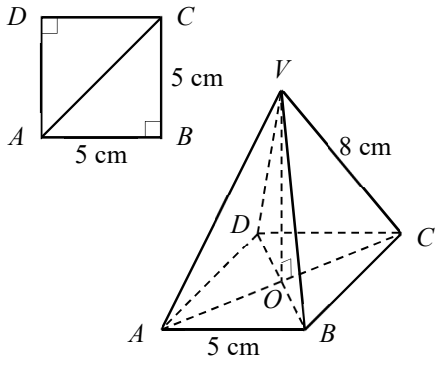
$VO^2 = 8^2 - (\dfrac{\sqrt{50}}{2})^2$（畢氏定理）

$VO = 7.18$ cm（三位有效數字）

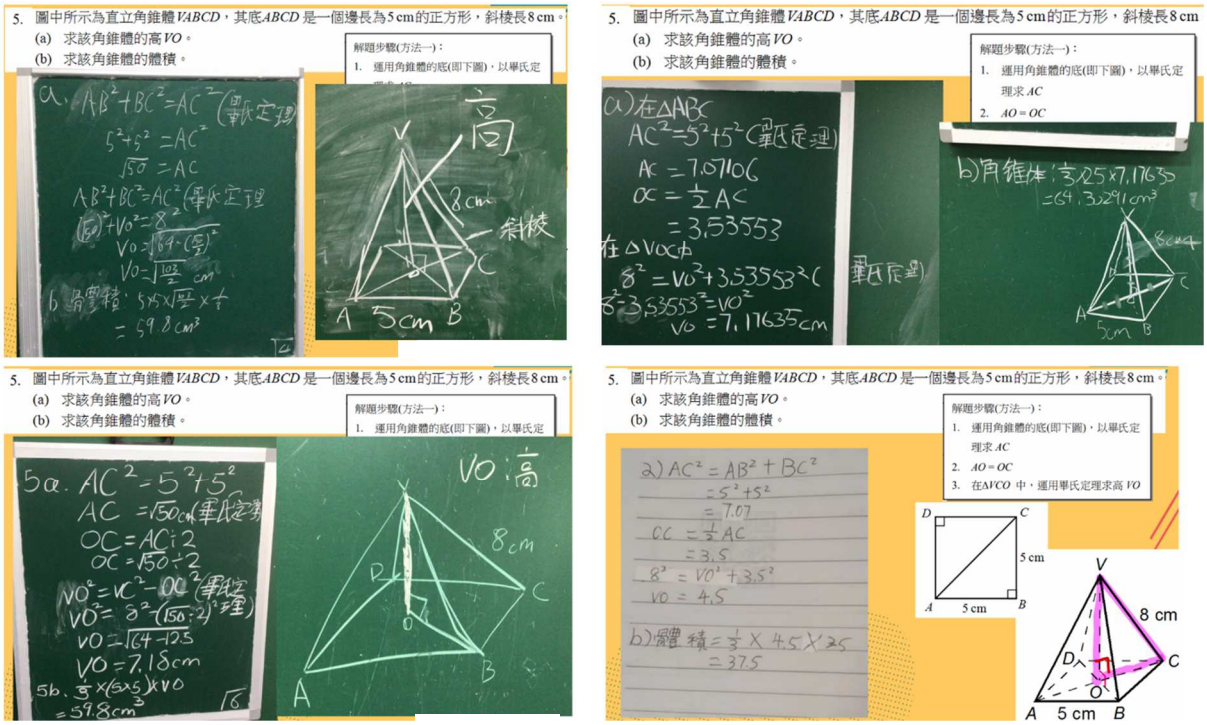
(b) 體積

$= \dfrac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 7.17635$

$= 59.8$ cm^3（三位有效數字）



圖七：備課展示的第二條題目



圖八：四組就著第二條題目的作答

5. 圖中所示為直立角錐體 $VABCD$，其底 $ABCD$ 是一個邊長為 5 cm 的正方形，斜棱長 8 cm。
   (a) 求該角錐體的高 VO。
   (b) 求該角錐體的體積。

(a) $CE = \dfrac{5}{2} = 2.5$ cm

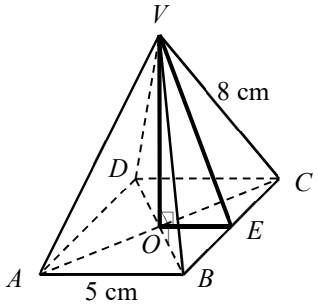
$VE = \sqrt{8^2 - 2.5^2} = \sqrt{57.75}$ cm（畢氏定理）

$OE = \dfrac{5}{2} = 2.5$ cm

$VO = \sqrt{(\sqrt{57.75})^2 - 2.5^2}$ （畢氏定理）

$= \sqrt{57.75 - 2.5^2}$

$= 7.18$ cm



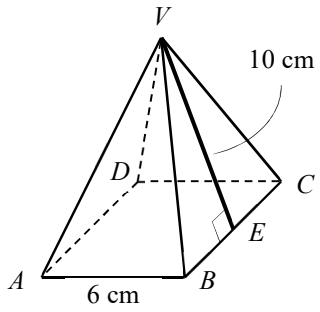
圖九：備課展示第二條題目的另一解法

延伸題及課堂總結

為了增加難度，我也準備了一條與備課展示第二條題目相似的問題（圖十）。這題目只給斜高及底邊長，直接要求同學求體積。這條題目有兩個難點：一、沒有分題作提醒；二、沒有提供錐體的高，需自行繪畫。在激烈的討論下，同學們有了共識，需先找角錐體的高，並作點 O 為 V 在平面 $ABCD$

的投影，利用直角三角形 ΔVOE 去解題。課堂完結前，同學們踴躍分享今天所學，不但記得角錐體的公式，更能分享計算角錐體高度的技巧。

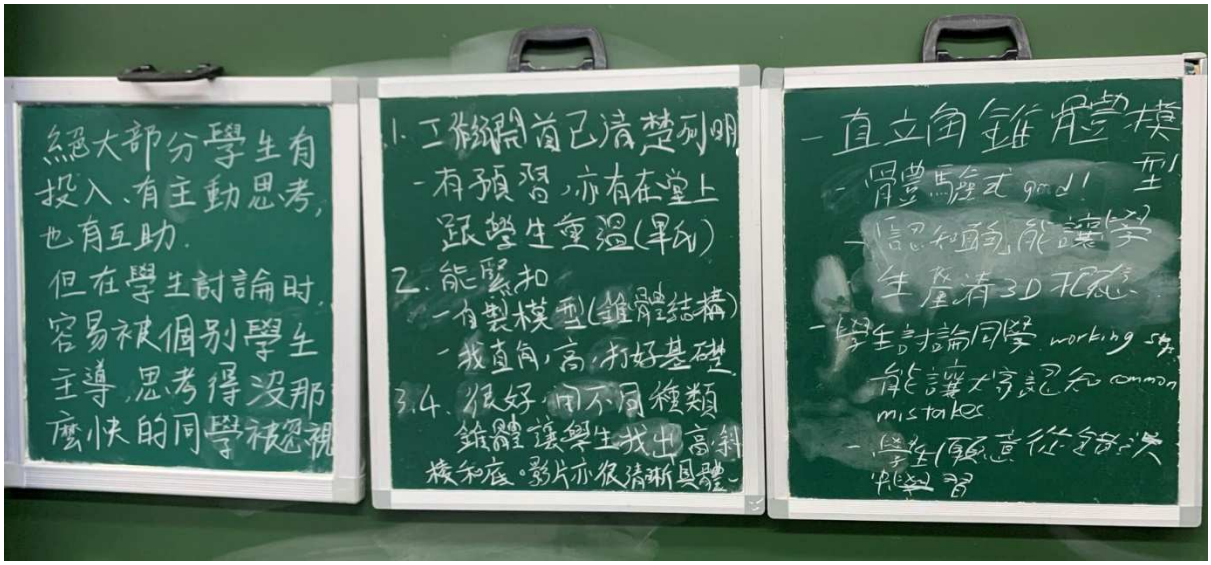
8. 下圖中所示為直立角錐體 *VABCD*。底面 *ABCD* 是一個邊長為 6 cm 的正方形。*E* 是 *BC* 上的中點及 *VE* = 10 cm。求該角錐體的體積。



圖十：延伸題

課後檢討及反思

觀課老師及嘉賓們都大力肯定學生的表現（圖十一），欣賞同學們課前完成備課，於堂上積極舉手作答，小組討論時互相協助，互補長短。同一時間，嘉賓們也很好奇，如何能培養學生的良好學習習慣。於本校，我們期望透過學校的教學系統去培養學生的自主學習能力（Zimmerman, 1990）。學生從中一入學便開始培養課前備課，課堂中討論及協助學習，課後反思的習慣。我們希望能激發同學們的求知慾，讓他們成為學習的主人，鼓勵他們主動鑽研知識，提高學習動機及效率。而且，在設計導學案內容的時候，我們會先想想該課題所需的基礎知識，並加插相關題目，幫助學生重温及鞏固知識。另外，導學及備課展示的題目難度也應循序漸進，讓同學能閱讀課本後完成備課，逐步建構知識。在小組討論及班內匯報時，同學們可以作出交流，就著解題步驟提出意見，從而學習不同的解題方法。老師們也會提供多樣化的學習機會，如親手製作錐體模型及觀看影片等，不但能提升課堂的趣味性，也能幫助理解公式，加強對立體的認知。不能忽略的是，老師們要相信每名學生都可教導，每名學生都可成功。老師可多鼓勵學生，放手讓他們嘗試和修正。學生們逐漸不怕犯錯，從錯誤中學習，不斷改善，知道自己可以學得好數學（Ahmed, 2017）。



- 絕大部分學生有投入、有主動思考，也有互助。
- 但在學生討論時，容易被個別學生主導，思考得沒那麼快的同學，被忽視

1. 工作開首已清楚列明
   - 有預習，亦有在堂上跟學生重溫（畢氏）
2. 能緊扣
   - 有製模型（錐體結構）
   - 找直角、高，打好基礎。

3.4.很好，用不同種類錐體讓學生找出高、斜、棱和底。影片亦很清晰具體

- 直立角錐體模型
  - 體驗式 Good！
  - 「認知直角」能讓學生釐清 3D 概念
- 學生討論同學 working steps
  - 能讓大家認知 common mistakes
  - 學生願意從錯誤中學習

圖十一：觀課嘉賓於議課時給予的意見

參考文獻

Ahmed, W. (2017). Motivation and self-regulated learning: A multivariate multilevel analysis. *International Journal of Psychology and Educational Studies*, *4*(3), 1 – 11.

PZ's Thinking Routines Toolbox | Project Zero. (n.d.). https://pz.harvard.edu/thinking-routines

Zimmerman, B. J. (1990). Self-regulated learning and academic achievement: An overview. *Educational Psychologist*, *25*(1), 3 – 17.

作者電郵：frederickyau@fkyc.edu.hk

附件：教授角錐體體積公式的導學案

中三級數學科

第四章　面積與體積（三）

4.1　角錐體

導學案二

備課課本頁數：p.4.5 – p.4.14

課堂目標：

1. 理解角錐體體積的公式 (K)
2. (a) 利用合適的直角三角形，求得錐體的高 (S)
   (b) 掌握運用公式計算角錐體的體積 (S)
3. 欣賞角錐體積與角柱體積的關係 (A)

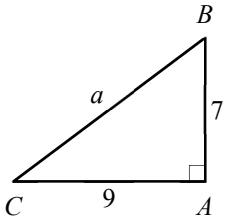
重點：計算角錐體的體積

難點：找出適當的直角三角形來計算高、斜高或斜棱

知識重溫：

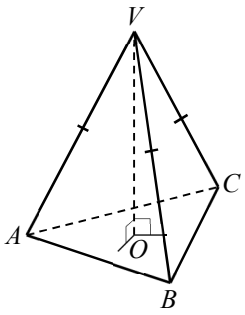
畢氏定理

1. 求右圖中未知數的值。（答案須準確至三位有效數字）



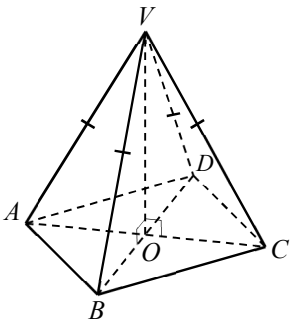
導學：

A. 直立角錐體相關概念（參考書 p.47）



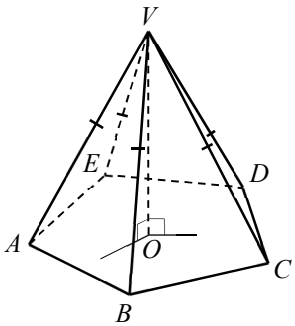
直立三角錐體

(a)



直立長方錐體

(b)



直立五角錐體

(c)

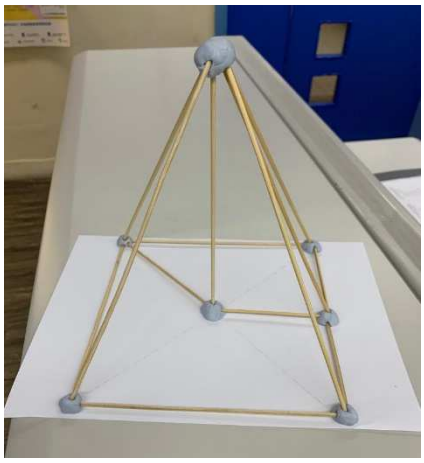
直立角錐體所有 _____ 的長度相等。

直立角錐體的每一個側面都是 _____ 三角形。

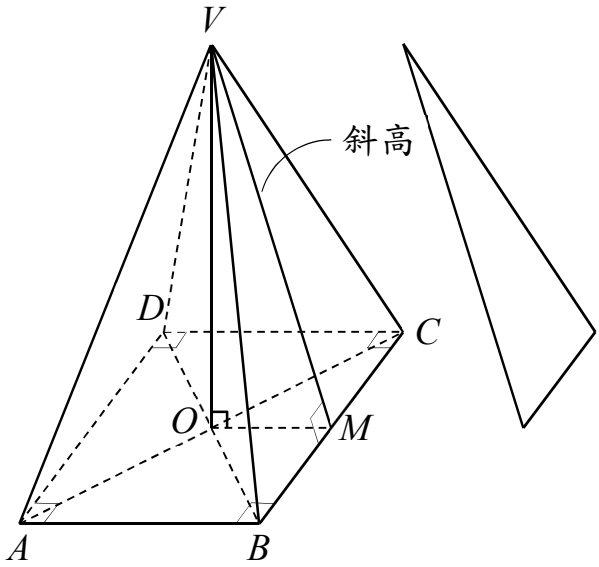
B. 學習活動（1）

同學請觀看以下片段，並製作直立角錐體模型。

製作直立角錐體模型
https://youtu.be/TFCtsW3mjwQ



2. *VABCD* 是直立長方錐體。試寫出以下各部分的名稱所屬的標記。



頂點：_____

高：_____

底：_____

斜棱：*VB*、_____

斜高：*VM*

直角三角形：_____

_____

_____

_____

C. 學習活動（2）

試根據已提供的紙板製作一個錐體，

我發現需要 _____ 個錐體可製成一個正方體。

D. 學習活動（3）

同學請觀看以下片段，並回答以下問題。

角錐體與角柱體的關係

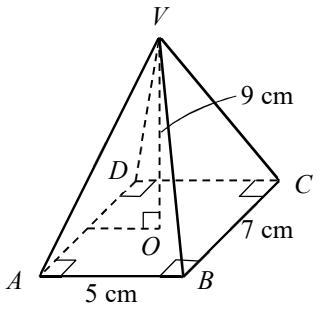
https://youtu.be/V4tsoCtAKHM

角柱體體積 = 角錐體體積的 _____ 倍。

公式：

角錐體體積 = _____

3. （參考書 p.4.12 例 4.1）求右圖角錐體的體積。



ABCD 底面積

= _____

= _____

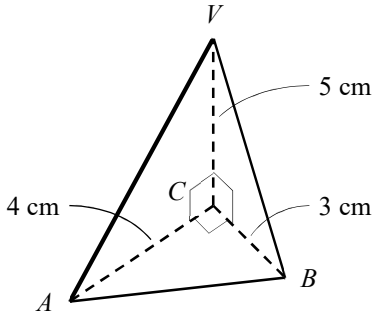
角錐體的體積

= _____

= _____

備課展示（Q.4 – 5）：

4. 求右圖中角錐體的體積。



_____

_____

_____

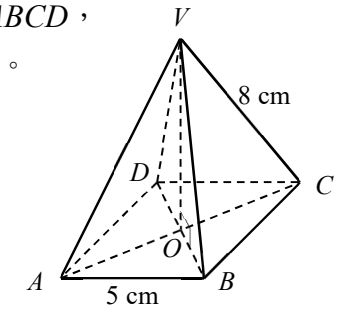
_____

_____

5. （參考書 p.4.13 – 14 例 4.3）圖中所示為直立角錐體 *VABCD*，其底 *ABCD* 是一個邊長為 5 cm 的正方形，斜棱長 8 cm。

(a) 求該角錐體的高 *VO*。

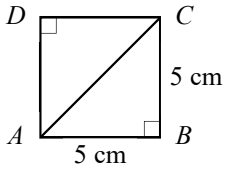
(b) 求該角錐體的體積。



解題步驟（方法一）：

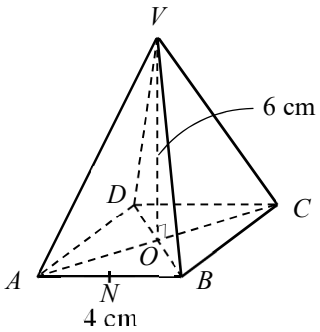
1. 運用角錐體的底（即下圖），以畢氏定理求 *AC*
2. *AO* = *OC*
3. 在 Δ*VCO* 中，運用畢氏定理求高 *VO*。

**可有其他方法嗎？

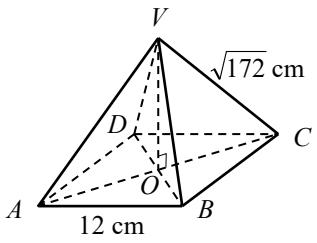


鞏固題：

6. 一個直立角錐體 *VABCD* 的高為 6 cm，底是邊長為 4 cm 的正方形。求該角錐體的體積。



7. 圖中，*VABCD* 是直立角錐體，其正方形底的邊長為 12 cm，其斜棱的長度為 $\sqrt{172}$ cm。



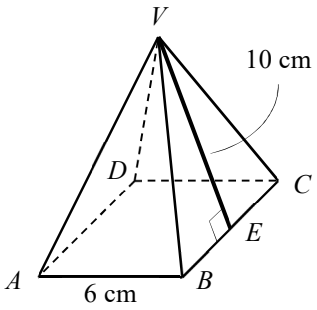
(a) 求 *AC* 的長度（答案以根式表示）。

(b) 求該角錐體的高。

(c) 求該角錐體的體積。

延伸題：

8. 下圖中所示為直立角錐體 *VABCD*。底面 *ABCD* 是一個邊長為 6 cm 的正方形。*E* 是 *BC* 上的中點及 *VE* = 10 cm。求該角錐體的體積。



延伸題：

6. 32 cm^2　　7. (a) $\sqrt{288}$ cm　(b) 10 cm　(c) 480 cm^3　　8. 114 cm^3

總結／筆記／反思：

試舉例說明計算角錐體體積的技巧。

備課： 閱書 p.4.15 – 4.18，完成導學案三

功課： 程度一 Ex.4.1 (1, 3, 5, 9, 20)
程度二 Ex.4.1 (18, 21)