以 Graspable Math（動態代數軟件）設計互動教學活動及課業

鍾永康
華仁書院（九龍）

引言

相信不少數學老師均有嘗試於課堂之中運用一些動態幾何軟件（例如 GeoGebra 及 Desmos）設計互動課堂活動，或是使用已預先設計好的互動課件（例如 gMath）於課堂中，讓學生能更深刻地理解數學概念，同時令數學學習變得更有趣味。但是動態幾何軟件亦有其限制。顧名思義，動態幾何軟件提供工具讓使用者能繪製動態的平面幾何及立體幾何物件，或是於坐標幾何中繪製函數圖像，因此老師較容易藉此設計幾何課題之互動課堂活動。相反，除非使用者能懂得運用程式碼（例如 GeoGebraScript 或是 JavaScript），否則較難以動態幾何軟件設計關於代數式或多項式等代數課題之互動教學活動。

有見及此，GeoGebra 與 Graspable Math 於 2024 年開始合作提供數學練習模式（Math Practice），讓老師更容易為代數課題設計互動課堂活動。

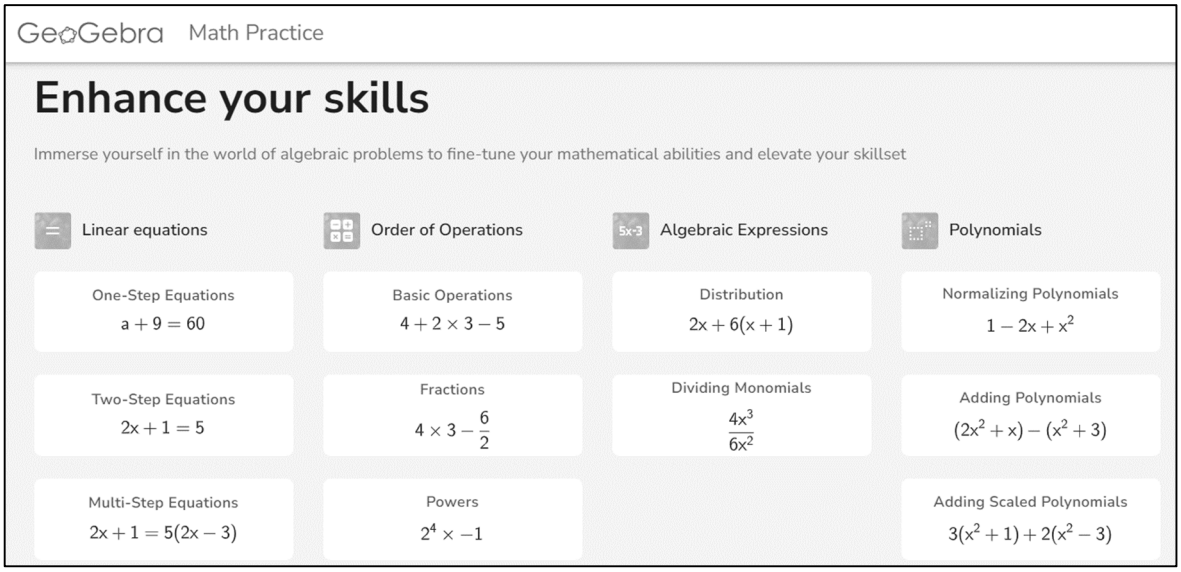

圖 1：GeoGebra 數學練習（https://www.geogebra.org/mathpractice/en）

然而 Graspable Math 又是甚麼類型的軟件？它的功能及使用方法如何？而老師又可怎樣善用此軟件設計互動課堂活動及課業？筆者希望透過此文章與各位分享一些資料和使用心得。

Graspable Math 簡介

Graspable Math（下稱 GM）是由三名學者 David Landy、Erik Weitnauer 及 Erin Ottmar 開發並於 2015 年開始免費公開供大眾使用的動態代數軟件（Dynamic Algebra Notations Software）。值得一提的是 David Landy 教授亦有協助開發另一個於 iOS 使用之動態代數軟件 Algebra Touch。現時 GM 只有線上版本，使用者要有連接互聯網之設備（電腦、平板或智能電話）並進入網址 https://activities.graspablemath.com 才能使用。在 GM 中，使用者可透過滑鼠或於觸控式螢幕將任意符號（包括數字、代數及運算符號）拖曳至所需位置來執行移項，並藉著點擊進行化簡運算。

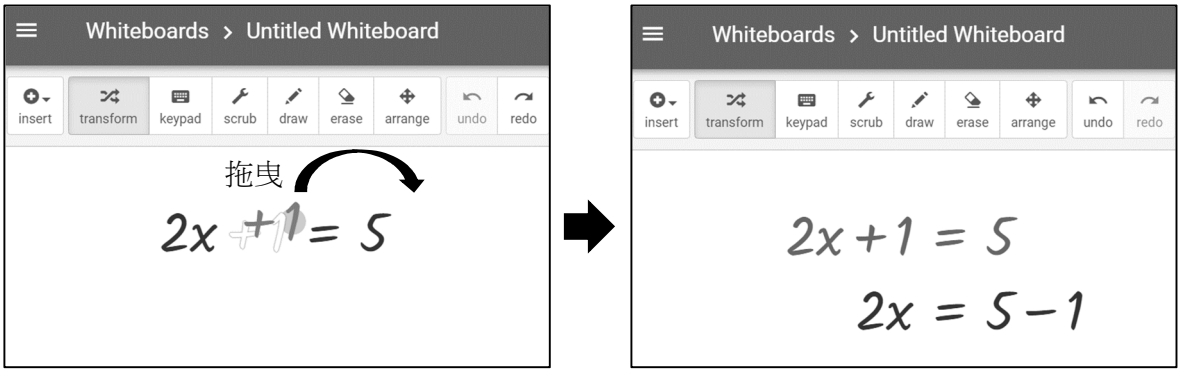

圖 2(a) 及 (b)：於 GM 中透過拖曳（drag and drop）進行移項

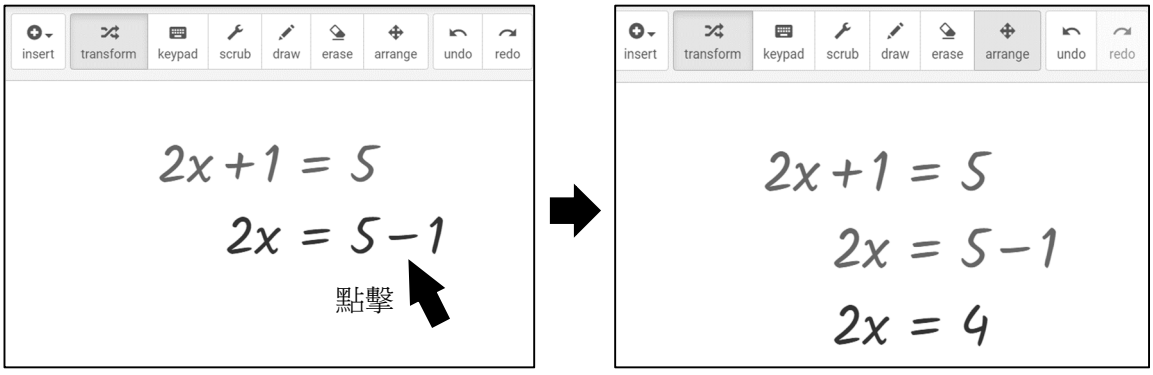

圖 3(a) 及 (b)：於 GM 中透過點擊（click）進行化簡

GM 內置基本的代數法則，例如交換律、結合律、分配律、指數定律、同類項簡化以及將分數化為最簡。同時，GM 亦提供相當大的自由度，讓使用者自行探索正確的解題過程。例如：於解方程 $2x+1=5$ 時，若使用者嘗試將 2 由方程左方移到右方，GM 亦會自動顯示出正確的結果。

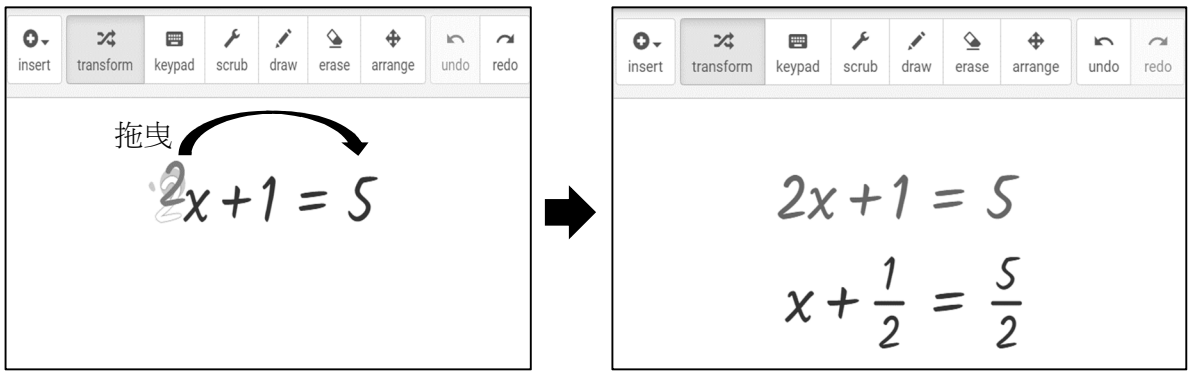

圖 4(a) 及 (b)：GM 容許使用者拖曳任意符號並自動顯示所得結果

不過，當使用者於解方程 $2(x+1)=5$ 時，若嘗試將括號內的 1 由方程左方移到右方，GM 便會自動將 1 還原至原來位置，示意此動作於數學上是不容許的。這時候使用者便要自行探索及嘗試其他可行之動作，例如：將括號前的 2 拖曳至括號內從而展開算式（或將 2 拖曳至方程式右方進行除法）。

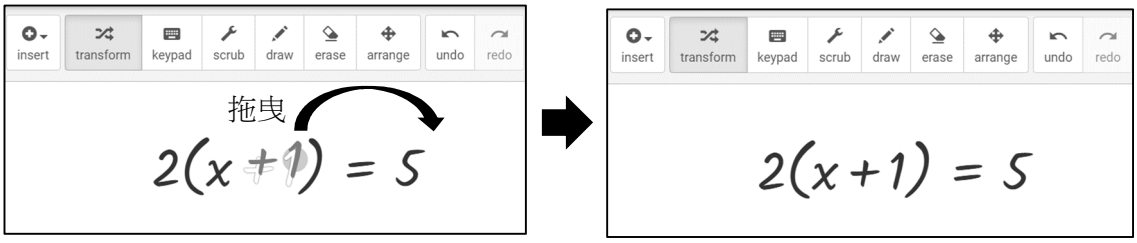

圖 5(a) 及 (b)：GM 不容許使用者進行違反代數法則之動作

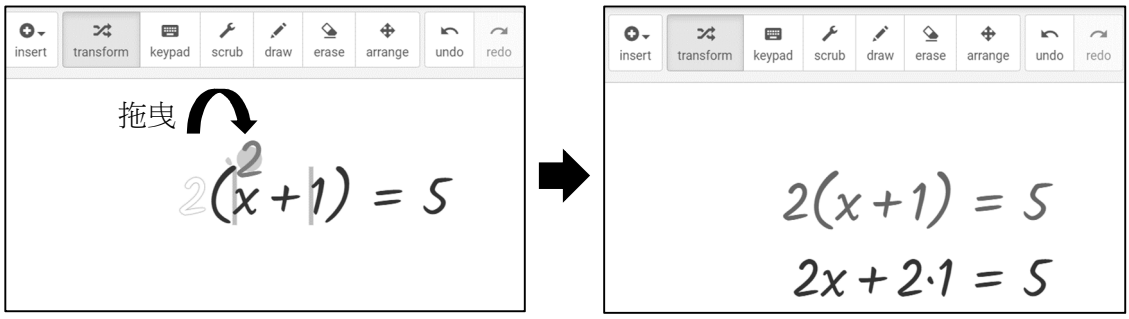

圖 6(a) 及 (b)：於 GM 中透過拖曳進行乘法分配律

Graspable Math 操作方式

基本上 GM 的操作方法只涉及拖曳及點擊，就算是初學者亦能於短時間內上手。GM 亦有提供操作指南，網址為 https://graspablemath.com/learn。

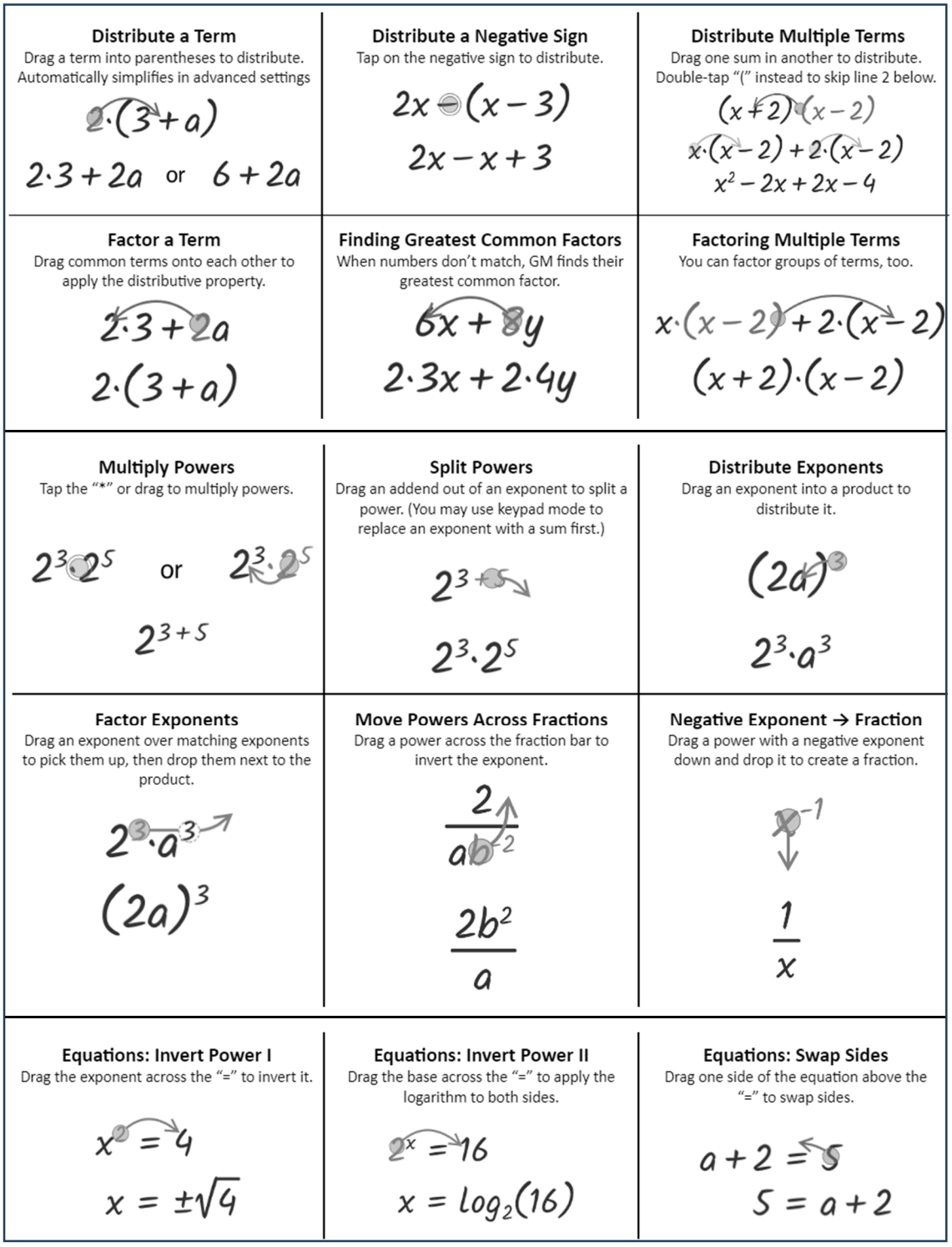

圖 7：GM 的基本操作方式

除了基本操作之外，使用者亦要注意一些涉及拖曳的細節。例如於方程 $2x + 1 = 3x$ 中，若使用者將方程右方的 3 移至左方時，GM 會根據使用者拖放符號的位置而進行不同的運算。

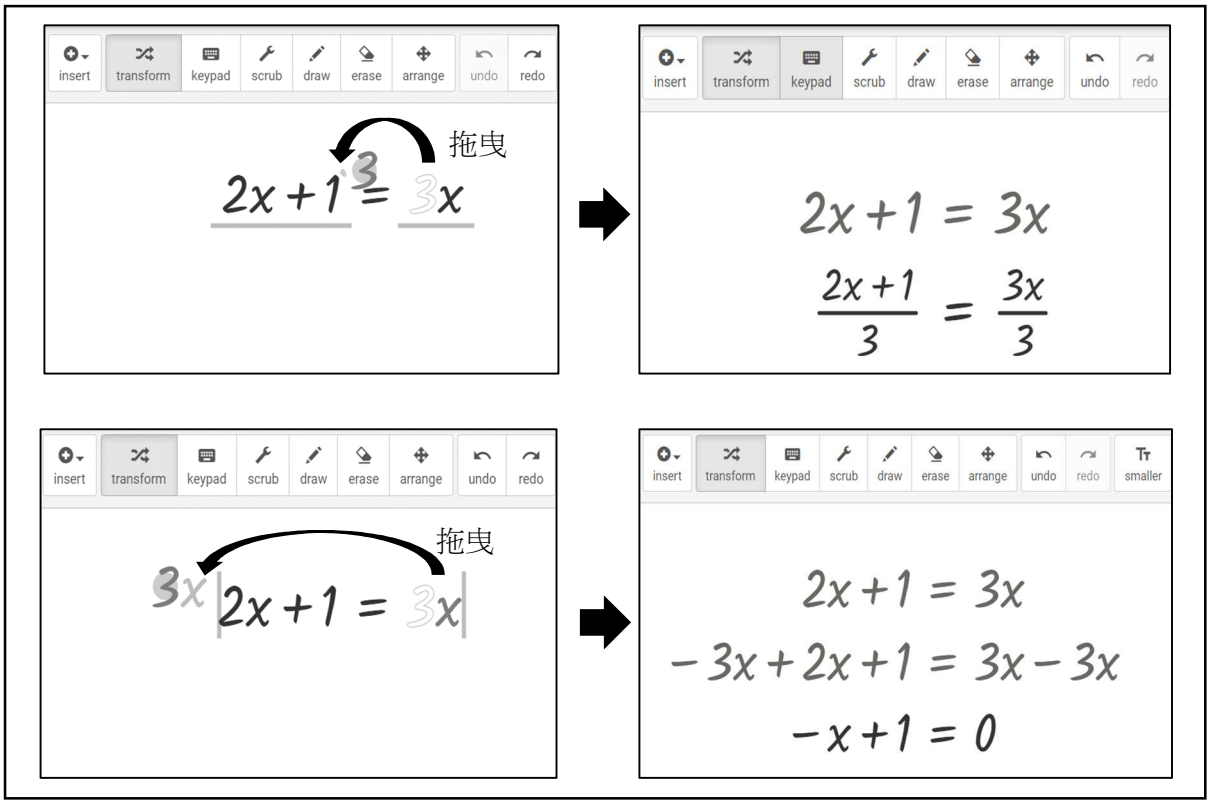

圖 8(a) 及 (b)：於 GM 拖放同一符號於不同位置會進行不同之運算

若使用者希望同時選擇兩個或以上符號並作移項，只須按著鍵盤之 Shift 鍵並使用滑鼠選取符號，或於觸控式螢幕中同時使用兩隻或以上手指按著希望選取之符號（成功選取之符號會以藍色顯示），就能夠同時拖曳多個符號。

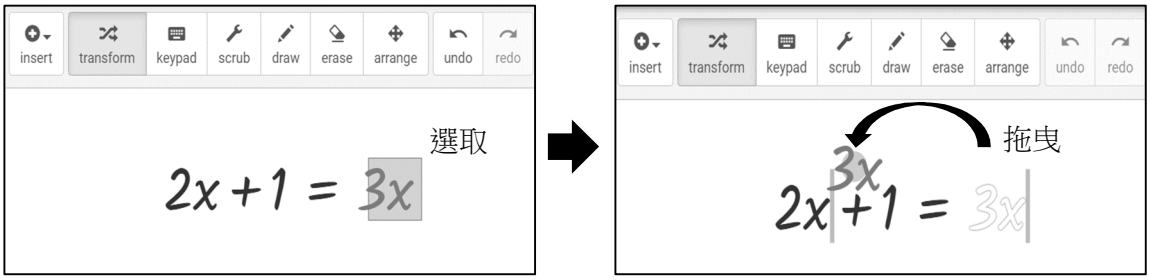

圖 9(a) 及 (b)：於 GM 中同時選取及拖曳多個符號

另外，使用者可於 GM 設定顯示結果的形式，例如可於 “Rewriting Equations via Dragging” 設定中選擇 “Dragging”（拖放符號後不會化簡同類項，即以天秤法展示結果）或 “Dragging and Simplify”（拖放符號後 GM 會自動化簡同類項，即以移項法展示結果）。GM 中有關顯示結果的設定多達 25 項。基於篇幅所限，筆者未能一一詳細介紹 GM 的設定及其進階操作。有興趣的讀者可到 GM 的網站參考其使用教學。

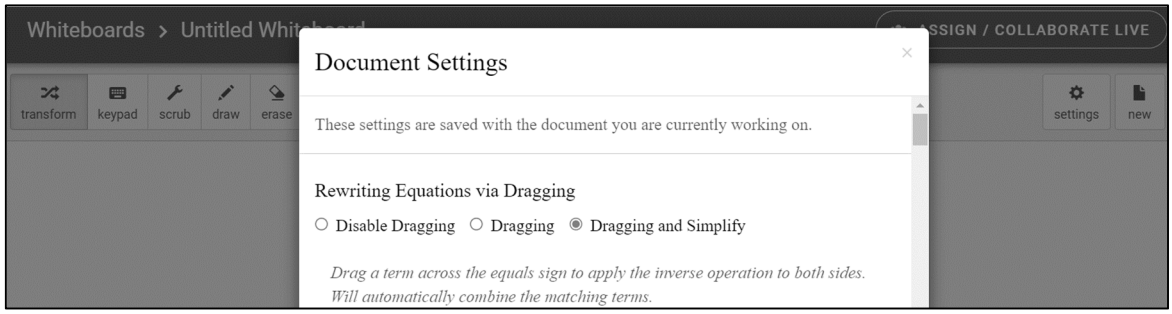

圖 10：於 GM 中設定方程式的顯示形式

總括而言，GM 以知覺學習（perceptual learning）及具身學習（embodied learning）形式讓使用者透過具體操作將代數法則具象化，令他們會較容易理解箇中的數學概念（Chen et al., 2023）。其中所涉及之動作（拖曳及點擊）十分直觀，而 GM 亦對所有動作提供即時回饋，讓使用者能夠熟習如何正確運用不同的代數法則，亦能同時自行探究不同的解題策略，從而培養較高階之代數思維（Weitnauer et al., 2016）。

相對於傳統的學習模式，GM 所提供的自動化簡功能讓使用者毋須於操作中進行任何運算，這或許會讓老師較為介懷。畢竟學生於測驗考試中須自己作運算，習慣依賴科技不是好現象。不過，根據筆者多年使用經驗，認為 GM 對於促進學生理解一元一次方程、主項變換、指數律及對數（logarithm）性質之效果是傳統的學習模式不能比擬的。接下來，筆者會分享運用 GM 設計一元一次方程教學活動之案例，展示 GM 用於教學的特別之處。

以 Graspable Math 設計互動教學活動：以一元一次方程為例

筆者由 2019 年開始便使用 GM 進行網課、翻轉課堂（flipped classroom）及 BYOD 互動課堂活動，同時亦為教科書設計 GM 資源。以中一級一元一次方程為例，筆者首先會於 GM 中插入一些例題，然後用 iOS 之屏幕錄形功能錄製解一元一次方程的示範短片並上載至 YouTube 中，最後於 GM 選擇插入 YouTube 短片並輸入短片之超連結，便能夠自行創作翻轉課堂之活動，讓學生依照短片於 GM 中逐步進行移項及四則運算，從而預習如何解一元一次方程。

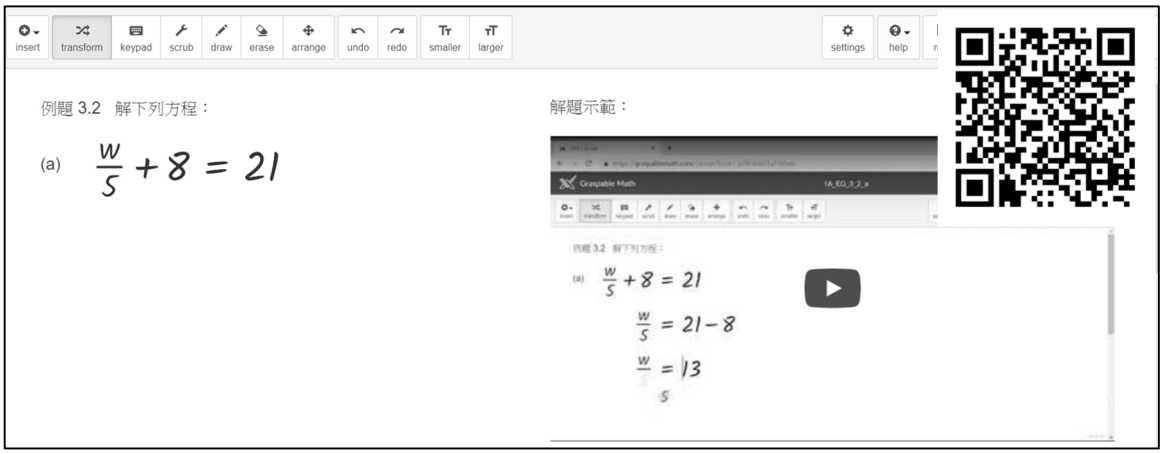

圖 11：GM 一元一次方程例題
（https://graspablemath.com/canvas?load=_a386a0669a27b9eb）

而筆者當然亦有利用 GM 所提供的自由度，讓學生於即時練習中自行探索正確的解題過程，並將結果分享至 Google Classroom。

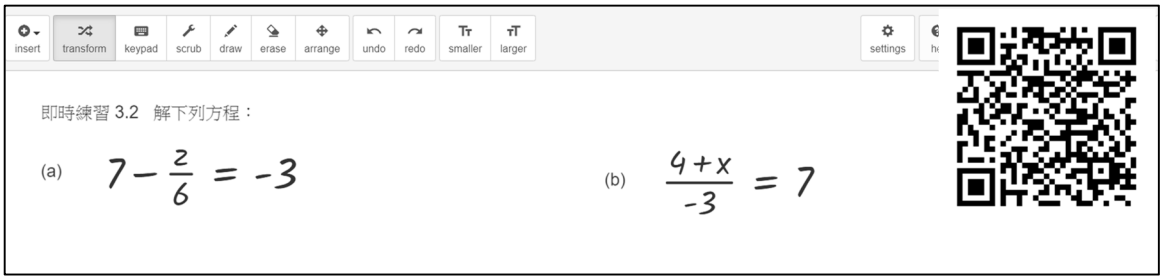

圖 12：GM 一元一次方程即時練習
（https://graspablemath.com/canvas?load=_d3862162e49a3fcf）

至於數學課堂中，筆者會邀請學生於 GM 中探究如何解一些較艱深之一元一次方程。在傳統紙筆教學模式中，學生往往對此類難題顯得無從入手，甚至難以察覺自己的步驟是否正確。但於 GM 的協助下，絕大部份學生會樂於嘗試動手解此類題目，而筆者不少學生亦反映於 GM 中解題就好像玩電子遊戲一樣有趣。

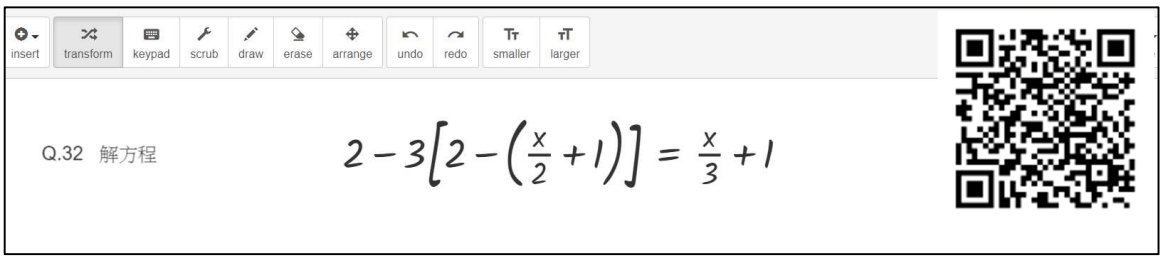

圖 13：GM 一元一次方程進階練習
（https://graspablemath.com/canvas?load=_532a12cf0cea58c6）

而最重要的是，學生能於 GM 中理解如何運用代數法則正確操作符號，並且自行探究可行之解題策略，向其他同學分享及互相學習。這些以學生為中心的學習活動（student-centered learning）能讓學生樂於投入學習，並同時培養他們的高階思維。

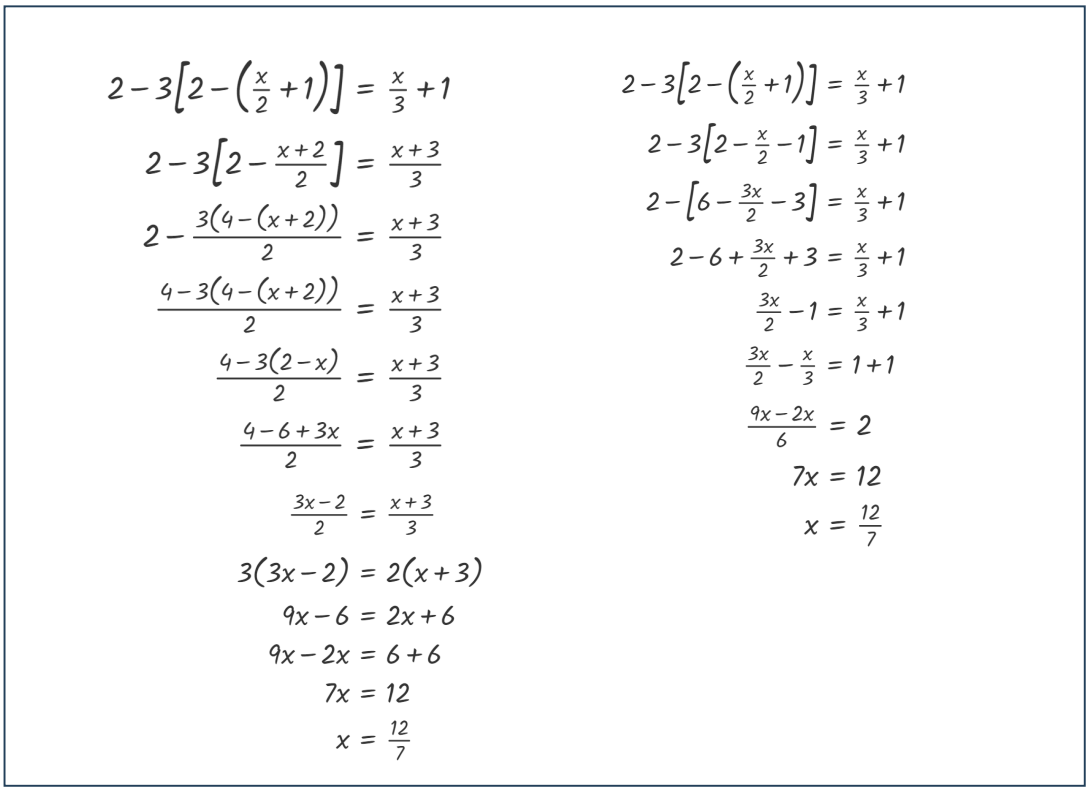

圖 14：學生於 GM 中展示的不同解題思路

以 Graspable Math 設計課業

筆者認為 GM 除了有助老師更容易設計互動教學活動外，它亦能用於設計課業。筆者在上一節中所展示的互動教學活動，是使用 GM 的互動白板功能（Whiteboard）製作。除此之外，GM 設有活動集（Activity Bank），其中有不少其他老師所創之活動。當然老師可於 GM 活動中自設題目，讓學生於課堂內外作更多練習。

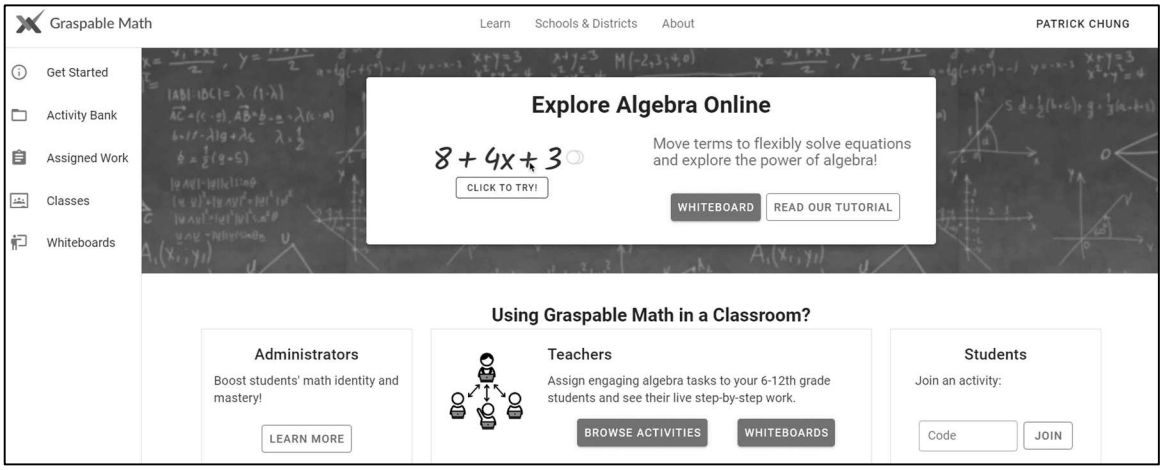

圖 15：GM 中提供互動白板（Whiteboard）及活動集（Activities）

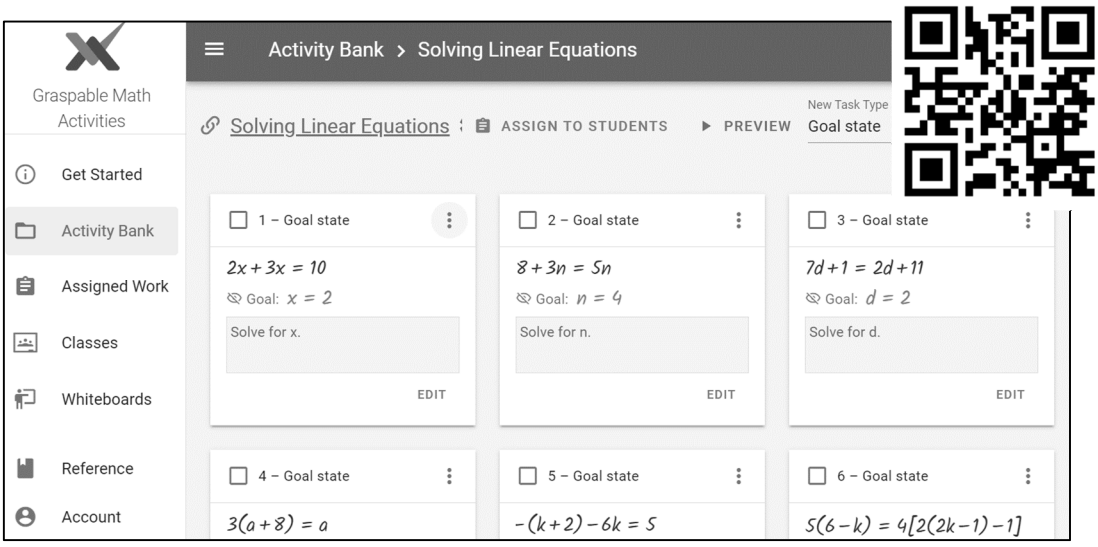

圖 16：於 GM 設計一元一次方程課業（https://gmacts.com/s/JCPBT）

GM 活動的特別之處是學生於作答時亦須透過拖曳及點擊解題，而不是直接輸入答案。當學生答對時，作答區域會變成綠色作示意。而 GM 會記錄學生於作答題目時所作的每一個動作，以供老師查看。

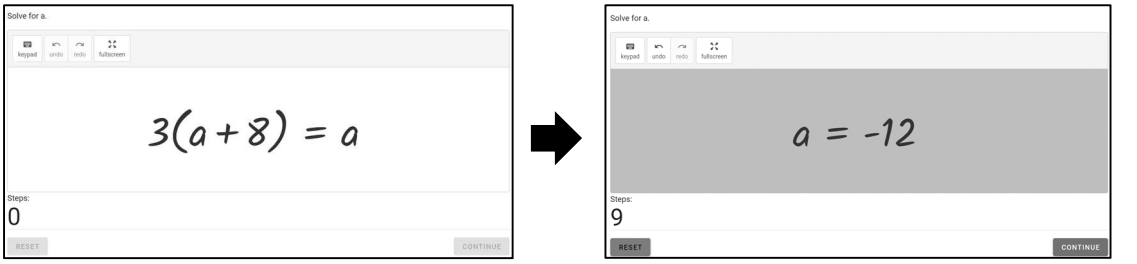

圖 17：學生須透過動作於 GM 活動中作答題目

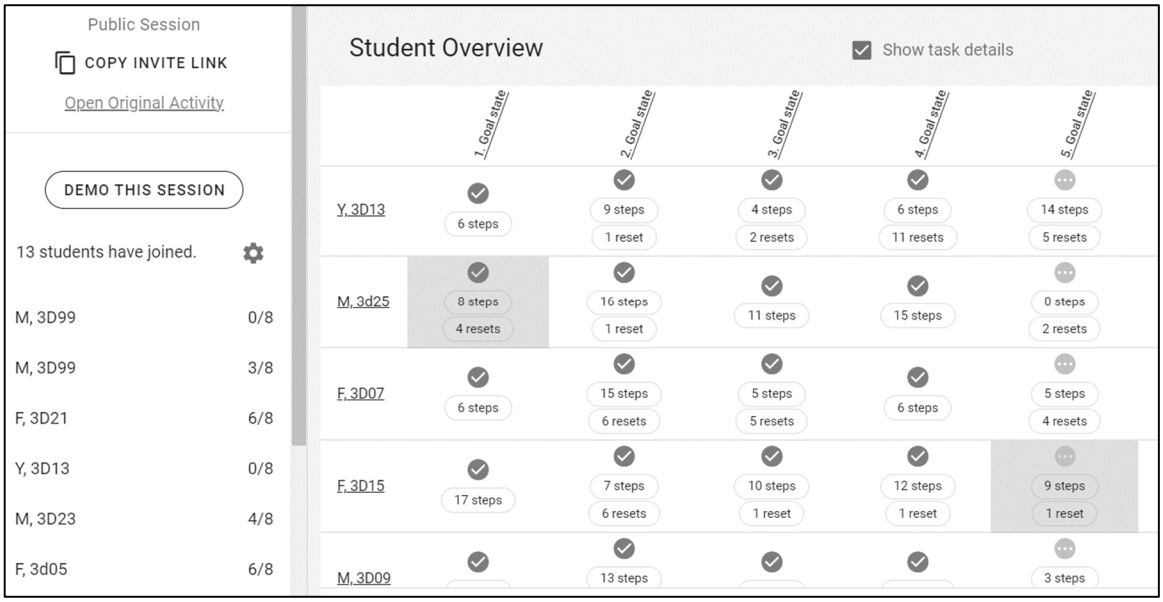

圖 18：老師可於後台查看學生作答題目的進度

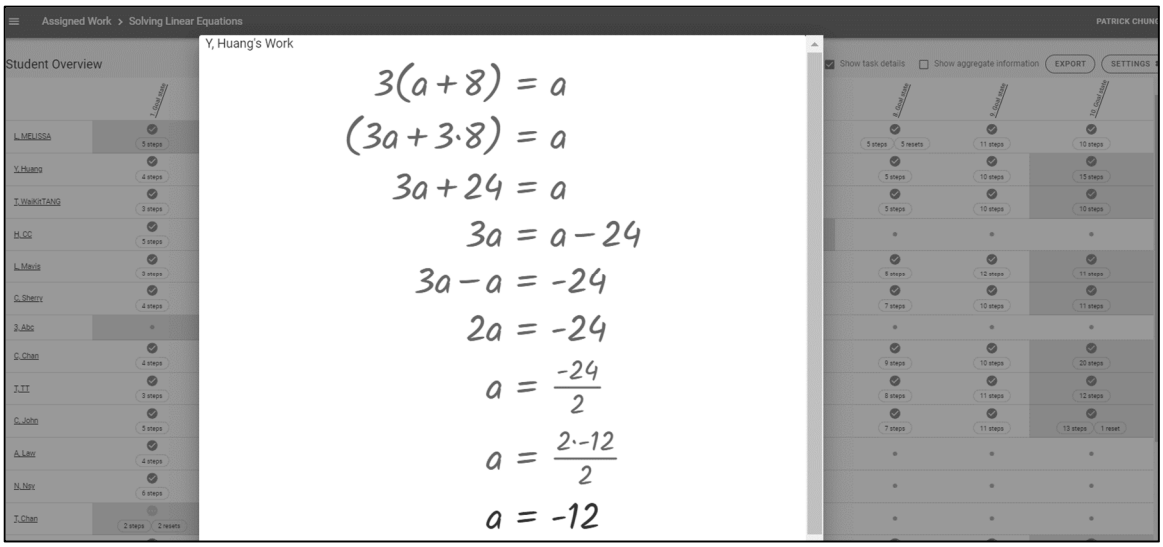

圖 19：老師亦可於後台查看個別學生作答題目所用之方法

相比起傳統課堂練習及家課，GM 活動的優勢是它能即時讓老師掌握學生的學習進度，及於有需要時查看學生的解題過程。這是其他電子評估平台（例如 Google Form 及 Kahoot!）不能做到的。當然，GM 不容許使用者違反任何代數法則，學生便不能「從錯誤中學習」，而老師亦難以預計當學生失去 GM 協助下是否仍然能成功解題。不過筆者認為 GM 是一個學習工具，於學生學習代數法則時作為鷹架（Scaffolding），讓學生藉著工具的協助下能夠更容易和有效地掌握箇中的數學概念，而鷹架的重點就是讓學生意識到這些工具是會漸漸移除的，之後學生便要靠自己的能力完成解題。而老師要做的是了解學生的學習能力及進度，從而判斷何時移除鷹架，讓學生回到傳統的紙筆運算。

結語

現時數學電子學習工具仍然不斷發展，而 GeoGebra、Graspable Math、Desmo 及 Polypad 等軟件的功能亦逐漸完善，各軟件之間亦開始嘗試作整合（例如 GeoGebra 與 Graspable Math 整合），以提供更佳的支援讓老師能設計更多的互動教學活動及課業。當然，筆者亦不是「為 IT 而 IT」，而是從自身的實踐經驗及學生的學習成果，認為 Graspable Math 跟 GeoGebra 一樣，是值得推廣的數學電子學習工具。日後如有機會，筆者會繼續分享更多有效的電子學習工具。

參考文獻

Chan, J.Y.C., Closser, A.H., Smith, H., Lee, J.E., Drzewiecki, K.C., Ottmar, E. (2023). Grasping Patterns of Algebraic Understanding: Dynamic Technology Facilitates Learning, Research, and Teaching in Mathematics Education. In: Robinson, K.M., Kotsopoulos, D., Dubé, A.K. (eds) *Mathematical Teaching and Learning*. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-31848-1_12

Weitnauer, E., Landy, D., & Ottmar, E. (2016). Graspable Math: Towards dynamic algebra notations that support learners better than paper. San Francisco: *Future Technologies Conference*. DOI: 10.1109/FTC.2016.7821641

作者電郵：patrick_chung@live.com