三角形面積比的教學

林倬欣
香港中文大學校友會聯會陳震夏中學

楔子

筆者今年任教中四級數學科，在直線方程一課中，有一道題目是涉及同高不同底的三角形面積比（見圖一）。由於教科書把這道題目放在中四級的內容，因此學生理應在初中或更甚是小學階段已經掌握當中的運算及概念。可是在實際的教學上，筆者卻發現並不是大部分的學生都能夠理解當中的原理。

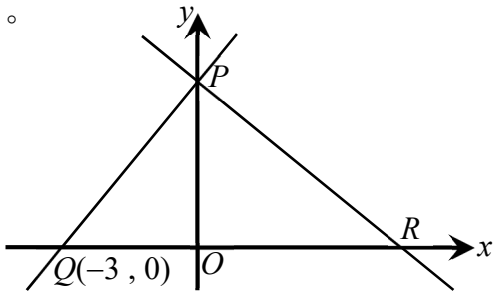
回顧過去 13 年的 HKDSE 題目，我們經常看見這類概念的蹤影[1]。事實上，筆者在任教高中級別時發現，一般學生都只在操練公開考試題目時才是初次遇上相關概念的題目。回顧過去數十年來的官方課程文件，都沒有特別列明這個教學內容，但學生卻要在公開考試掌握此技巧。那麼，問題出在哪裡？前線數學老師應如何設計教學內容及教材，使能力稍遜學生都能夠循序漸進地學會應付這類考評題目？

在圖中，直線 PR 的方程是 $4x + 5y - 20 = 0$。

(a) 求 R 的坐標。

(b) 求 ΔPQR 的面積。

(c) S 為線段 QR 上的一點使得 $QS : SR = 3 : 1$，求 ΔPSR 的面積。



圖一：(c) 部題目涉及同高不同底的三角形面積比

1 全部題目均在卷二甲部：2012 年 Q17、2013 年 Q18、2014 年 Q17、2015 年 Q17、2016 年 Q20、2017 年 Q16、2018 年 Q16、2019 年 Q16、2020 年 Q18、2021 年 Q20、2022 年 Q17、2023 年 Q17 和 2024 年 Q17。

缺少的拼圖？

回顧整個中小學的數學科課程，學生在不同年級所學習的內容如下：

小五	三角形面積 $= \frac{底\times高}{2}$
中一	比、率、比例
中三	相似圖形的面積比與長度比

在首三個學習階段，似乎從來沒有涉獵到同高不同底的三角形面積比。筆者擔心，若課程文件沒有特別指明同高不同底的三角形面積比，教科書大概都不會觸及這個概念。而作為前線老師（尤其是年青一輩的）未必知道學生踏入第四學習階段，在操練公開試題目時，才是首次接觸這類型的題目。這個現象實在令人擔心。

需要修改課程文件嗎？

對比 1999 年的舊課程，在現行 2017 年優化的新課程中，似乎有不少的課題也作出了修改，例如刪去立方差及立方和的恆等式、三角形不等式及極坐標系。在此，筆者暫不討論以上課題刪減的原因及必要性。不過，既然在修訂課程時，教育局會根據課程的完整性及連貫性，除了把不同的課題作調動外，也會按需要作出增加和刪減。因此，筆者的腦海便浮現一個問題：究竟有沒有可能為同高不同底的三角形面積比「正名」，正式地把它加入課程，使一眾的教育工作者明確地知道應該何時引入、怎樣教授？作為前線老師的我們又應該如何配合呢？總不可能留待學生升到高中操練公開試題目時，才是初次接觸吧？

對前線老師的一點建議

事實上，同高不同底的三角形面積比問題歸根到底也只不過是小學階段學習「三角形面積 $= \frac{底\times高}{2}$」公式的延續。若然兩個三角形的高度相同，唯一影響三角形面積的變量就是底邊的長度。更進一步來說，底邊長度的比相等於三角形面積的比。

以筆者愚見，同高不同底三角形面積比的問題可以在小學階段開始引入，原因有兩個：一、這個面積比完全建基於「三角形面積 $= \frac{底\times高}{2}$」

公式，只要配合適當的例子說明，深信小學生也可以理解背後的倍數關係；二、故意跟中三的相似三角形面積之比分開，可以避免學生感到混亂。筆者深信，高小學生心智發展能夠理解以上的概念。而且，Digirolamo 和 Hintzman（1997）也提出通常越早學習的東西都會比較容易記憶，因此在小學階段就開始接觸同高不同底的三角形面積比問題，較容易使這個概念印在學生的長期記憶當中。

值得注意的是，由於小學五年級尚未學習比例的概念，故小學老師在任教時也要注意邊長的數字組合。以下是一個符合小學生程度的例子：

底邊長度	高度	三角形面積
3	6	9
6	6	18
12	6	36
24	6	72

從以上的例子，四個三角形的高度相同，唯它們的底邊長度是前一個三角形的 2 倍，它們的面積亦是前一個的 2 倍。筆者強調，在目前的階段，只須為學生作一點介紹已經足夠，不宜過於深入探討比的概念。因為對於能力稍遜的學生來說，他們或許只懂得將第三個三角形跟前一個三角形去比較，未必懂得跟第一個三角形進行比較，故此他們較難掌握底邊的改變如何影響三角形的面積。若在第二學習階段就使用的底邊長度是 3、4、5、6 的組合，更不是一個恰當的例子。

當然，在中一教授「比、率、比例」一課時，老師宜再一次引入三角形面積的討論，以鞏固及承接小學階段的已有知識。在這個階段，老師便可以利用以下的例子作說明：

底邊長度	高度	三角形面積
3	4	6
4	4	8
5	4	10
6	4	12

從以上的例子，四個三角形的高度不變，但底邊長度卻不同，這正好延續小學階段所學。同時，初中老師在擬定例子時，筆者建議使用的高度應為偶數，以避免三角形的面積出現小數的情況，節外生枝。

結語

正如前文提及，在現行 2017 年優化的新課程中，當局仍然未有在課程文件中正式地加入同高不同底的三角形面積比這課題。可是，筆者相信考評局仍會繼續在香港中學文憑考試的卷二中考核相關的知識。因此，為了彌補「教」、「考」之間的差距，只好由前線老師作把關，在校本教材加入類似的探究活動，為學生踏入第四學習階段做好準備。

參考文獻

教育局（2017）。《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）》。香港：教育局。

Digirolamo, G. J., & Hintzman, D. L. (1997). First impressions are lasting impressions: A primacy effect in memory for repetitions. *Psychonomic Bulletin & Review, 4*(1), 121 – 124.

作者電郵：lamcheukyan79@gmail.com