「數學歸納法」，歸納乎？演繹乎？

蕭文強
香港大學數學系

緣起

月前與一些數學仝工談及數學歸納法（Mathematical Induction）的教學，引發了一些感想，茲誌如下。若然由此帶來更多討論，互相交流，固所願也。

關於數學歸納法的理論根據、它的各種「變著」（特別是所謂弱版本與強版本，或稱數學歸納法第一原理與第二原理）、使用數學歸納法需要注意的事情、眾多使用數學歸納法的例子等等，已經有不少書本敘述，內容既豐富詳盡亦生動有趣，於此不贅。記得我在香港大學修讀一年級數學的年頭，讀到以下三本小書，雖然每本頁數不多，卻令我獲益良多，印象深刻，至今不忘：

1. 華羅庚，《數學歸納法》，1963 年。
2. 洪　波，《怎樣應用數學歸納法》，1964 年。
3. I. S. Sominskii，《數學歸納法》，1961 年〔原俄文版，1959 年〕。

一般學生對數學歸納法的認識

引起我更大關注者，是為何不少中學生（甚至進了大學修讀理工科以至專修數學的大學生），對這個課題似乎不大了了，卻又以為學懂了。表面上，他們懂得首先證明命題 $P(n)$ 對 $n = 1$ 成立，然後證明如果 $P(n)$ 對 $n = k$ 成立，則 $P(n)$ 對 $n = k + 1$ 也成立；於是，對全部 n，命題 $P(n)$ 成立，證畢。但再問下去，卻露了餡，有些學生甚至以為 $P(n)$ 是一道涉及 n 的代數公式，例如 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 或者 $n^2 + 1$ 等等。至於如何利用這種想法去發現 $P(n)$ 涉及的代數公式是什麼，就更少人能答得出來了。

究其原因，可能與考試範圍有關。打開官方的課程文件提到數學歸納法那一節，它清楚列明只需要教授數學歸納法第一原理，並且只需要使用

它證明有窮數列之和的公式，更特別聲明不需要使用它證明不等式。言下之意，好像把這套方法，局限於證明某條給定的公式，就是某個數列之和的答案。難怪很多學生並沒有意會到這套方法，在別的場合亦大派用場，例如：在幾何、在組合數學、以至在更一般的數學問題上。固然，課程文件中的這些注腳，或許是出於善意提示，以免課程內容過於繁難，但如此限制了教師的靈活調度與教學內容，亦非善策。更可惜者，是學生沒有理解數學歸納法內涵的本質精神，既然他們沒有欣賞到這種精神，遑論掌握它以解決問題矣。

一般學生或者能夠一板一眼地對某一類題目（例如數列之和）以數學歸納法進行證明，但是，只得其形而未得其神，就如同披上一套整齊而刻板的制服，而非一襲舒適而活潑的便服。那道公式從何而得？（為何擬題者如此聰明，找到這道公式呢？）如何發現該道公式呢？這些問題與探索、實驗、收集數據、觀察具體情況、審視較簡單的特例、提出猜測等等工夫有關。很可惜，這些工夫都給放在一旁，少加理會，只著重使用數學歸納法第一原理的形式運作，機械化而刻板。固然，這樣使用數學歸納法，是學到了演繹推理，是數學工夫的一個主要成份，但還有另外一種性質有異，稱作歸納法（Induction）的思考方式，卻被冷落了。更叫人摸不著頭腦者，是這種特殊的演繹工夫（有別於歸納法），卻被稱作「數學歸納法」！

也許，這種名稱上引起的誤導成份，是造成學生對數學歸納法的困惑的部份原因。但是，數學歸納法的本質精神，正好引領我們進行某程度的歸納法（有別於演繹法）和探索發現過程，或者是學習數學歸納法的一個切入點，值得我們做好教學設計以臻此境。以下，讓我們就著一些例子說明一下吧。

大家耳熟能詳的一個例子：$1 + 2 + 3 + \ldots + n = ?$

讓我們就以那道大家都耳熟能詳的公式 $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 談起。使用數學歸納法容易證明這個命題，但最叫人不滿意者，是你怎麼知道答案是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 呢？如果換了是另一條涉及 n 的代數式，數學歸納法即無所施其技矣！譬如說，假如你以為答案是 n^2，進行數學歸納法時，驗證對 $n = 1$ 成立，但企圖把公式從 $n = k$ 推導到 $n = k + 1$，卻行不通了。

這有如古代希臘數學家擅長的窮竭法（Method of Exhaustion），用以證明不少面積和體積的公式，例如四棱錐體積公式是底面積乘以高之三分一。如果事前你不知道正確公式，以為它是底面積乘以高之二分一，照樣做下去，窮竭法便行不通了！

固然，對於 $1+2+3+\ldots+n$ 之和，我們知道有其他漂亮巧妙的手法，得出 $\frac{n(n+1)}{2}$，例如置 $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$，倒轉來寫是 $S = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$，再把二式相加，答案即浮現出來了。若以圖形觀察，便是把 n 階梯級反過來疊在原來的梯級上，答案也馬上浮現出來。不過，還有一種手段叫做歸納法，是科學上常用的思考方式，即是從一些具體情況歸納出普遍法則，從中尋找規律。當然，這種獲得知識的思考方式，並不為嚴謹數學接受，因為它沒有以演繹方式，通過嚴謹的邏輯推理證明結果是正確無誤，頂多是增強了我們對結果的支持度，或者說，引領我們作出合理可信的猜想（Conjecture）而已。在這個數列和問題，把連續 n 個自然數加起來，容易得出答案依次是

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots\ ;$$

如果分別乘以 2，得出

$$2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ \ldots\ ;$$

眼睛銳利又對數字敏感的讀者會聯想到

$$1\times 2,\ 2\times 3,\ 3\times 4,\ 4\times 5,\ 5\times 6,\ 6\times 7,\ \ldots\ ;$$

從而猜測答案是 $\frac{n(n+1)}{2}$。然而，這樣得到結果，是歸納工夫而已，並沒有確立結果是對的。一個經典的例子是問：$1+1141y^2$ 是否平方數？即使你算至 y 是一百萬甚至一千萬時，答案還是否定的。但其實，可以證明不單有 y 使 $1+1141y^2$ 是平方數，甚至有無限多個這樣的 y，不過最小的 y 已經是個二十六位數，就是 30693385322765657197397208！使用數學歸納法，我們以演繹方式證明公式 $1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 是正確無誤，但是，顯然上面提及的其他方法比較清晰優美，而且使我們加深對命題的理解。數學證明最有價值的作用，並非驗證命題是正確無誤，而是增

強我們對命題的理解。(更多的例子，可以參看：蕭文強，《數學證明》，1990 年，1992 年；修訂本，2007 年，2008 年；增訂本，2016 年，2021 年；《數學證明是怎樣的一項數學活動？》，2023 年。)

一個並不涉及公式的例子：「兩色定理」

數學歸納法的應用，並非只局限於證明公式。如果學了它只用以證明公式，便錯過不少有趣的應用，是太可惜了。我在中學時代碰過一個著色的問題，運用數學歸納法得到解答，清楚俐落而且簡明快捷，令我當時眼界大開！

有 n 條直線把平面劃分成若干區域，這些直線中沒有兩條平行，也沒有三條共點（數學上叫做一般位置上的 n 條直線）。「兩色定理」說：必能用黑和白兩種顏色把區域著色，使相鄰的區域不同顏色，黑白相間（見圖 1）。

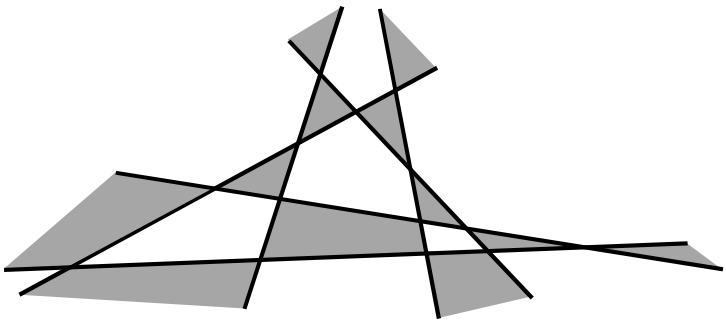


圖 1

明顯地，如果 $n=1$ 或 2，定理成立。假設對 $n=k$，定理成立，我們設法證明對 $n=k+1$，定理也成立。那 $k+1$ 條在一般位置上的直線把平面分成若干區域，把其中一條直線 L 拿掉，剩下 k 條在一般位置上的直線把平面分成若干區域。由於對 $n=k$ 定理成立，我們有辦法把這些區域著上黑白二色，使相鄰的區域不同顏色。L 把平面分成 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 兩份，L 與另外的 k 條線各交於一點，把這 $k+1$ 個通過的區域，每個分成相鄰兩份，是同色的。於是，只用把這 $k+1$ 個區域在 $\mathcal{A}$ 的部份換黑為白、白為黑；在 $\mathcal{B}$ 的部份則黑白不變（見圖 2a、2b）。那麼，原來 $k+1$ 條直線分成的區域便著上黑白二色，相鄰的區域不同顏色了。即是說，對 $n=k+1$ 定理也成立。

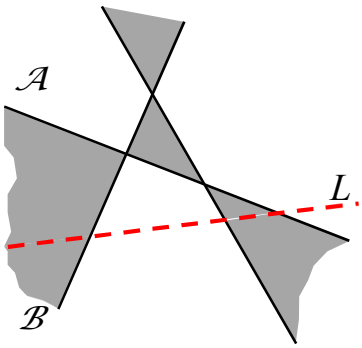


圖 2a

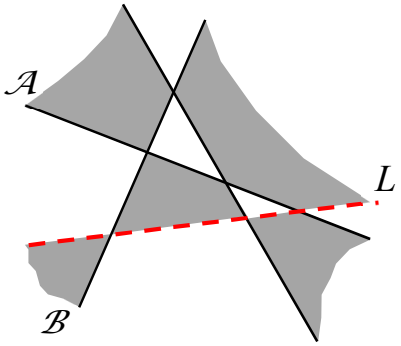


圖 2b

遞歸關係式: 河內塔問題

數學上有一種方法，叫做遞歸關係式（Recurrence Relation），最能體現數學歸納法的本質精神，即是從特殊情況去理解一般情況，通過簡化情況以掌握複雜情況。讓我們以一個也是大家耳熟能詳的問題說明這回事，就是著名的河內塔問題（Tower of Hanoi Problem）。有一疊由小至大的金碟放置在一根柱 (A) 上，要求把這疊金碟移至另一根柱 (B) 上，也是由小至大地放置著，但每次只容許移動一隻金碟，也只容許把它放置在比它更大的金碟上面。為了讓移動變成可能，我們有第三根柱 (C) 作「過渡」之用：問題是：是否能這樣做？如何辦到？如果有 n 隻金碟，最小的移動次數是什麼呢？

設 $F(n)$ 是最小的移動次數，不難知道 $F(1) = 1$，而且

$$F(n) \leq 2F(n-1) + 1,$$

因為我們可以先把 $n - 1$ 隻金碟從 A 柱移到 C 柱，至少用了 $F(n-1)$ 步；再把最大的那隻金碟（在柱 A 底部）從 A 柱移到 B 柱，用了一步；最後，把較小的那 $n - 1$ 隻金碟從 C 柱移到 B 柱，又用了至少 $F(n-1)$ 步。於是我們知道

$$F(n) \leq 2F(n-1) + 1。$$

其實，也有

$$F(n) \geq 2F(n-1) + 1,$$

因為把最大的那隻金碟從 A 柱移到 B 柱之前，必須把較小的 $n - 1$ 隻金碟

全部移到 C 柱才行。要這樣辦，至少用了 $F(n-1)$ 步。把那 $n-1$ 隻較小的金碟從 C 柱移到 B 柱，又至少用了 $F(n-1)$ 步，由此得知

$$F(n) \geq 2F(n-1)+1。$$

於是，我們得到遞歸公式

$$F(n) = 2F(n-1)+1。$$

依次代入公式，即是

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1)+1 = 2[2F(n-2)+1]+1 = 2^2F(n-2)+2+1 \\ &= 2^2[2F(n-3)+1]+2+1 = 2^3F(n-3)+2^2+2+1 \\ &= 2^{n-1}F(1)+2^{n-2}+\ldots+2^2+2+1 \\ &= 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^2+2+1 = 2^n-1。 \end{aligned}$$

這正是數學歸納法本質精神之體現，逐步簡化情況至初始情況，然後，用倒推手法（Reversing the Steps）解決問題。如果觀察一些特殊情況（n 是小的數目），還可以得出如何移動那 2^n-1 步呢。也就是說，我們利用遞歸關係式，可以設計演算法方案。

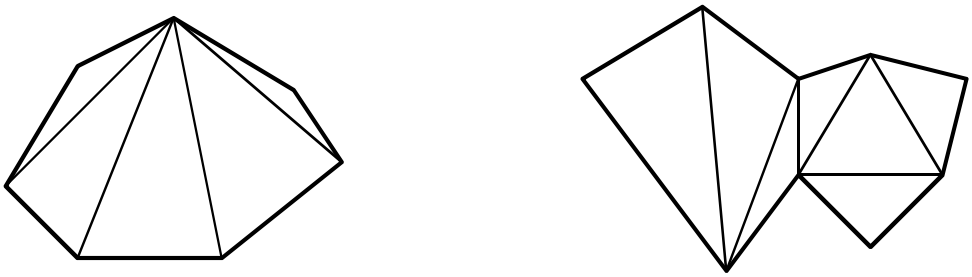
如果已知 $F(n)=2^n-1$，當然可以使用數學歸納法快速地證明公式正確無誤，關鍵的一步就是遞歸關係式 $F(n)=2F(n-1)+1$。可見數學歸納法的形式使用，骨子裡是它的本質精神在發揮作用。

結尾一個例子：n 邊形的內角和

讓我們以一個大家熟悉的中學幾何問題作結束，在其中讀者會再次看到數學歸納法並不局限於證明某道已給定的公式，而且領略到數學歸納法第二原理的用途。大家一定曉得凸 n 邊形內角和是 $(n-2)\pi$，π 是一個平角的度量。證明並不難，從其中一個端點構作連結另外 $n-2$ 個端點（撇開那個端點的兩個相鄰頂點）的對角線，得出 $n-2$ 個三角形。每個三角形的內角和是 π，故原來凸 n 邊形的內角和是 $(n-2)\pi$。

如果 n 邊形是凹的話，答案是否仍然是 $(n-2)\pi$ 呢？是的，但首先我們需要證明任何 n 邊形（不論凸或凹）都可以分成 $n-2$ 個三角形，其中所有的端點都是原來 n 邊形的端點（見圖 3），這種把多邊形分成三角形的方

法，叫做多邊形的一個三角劃分（triangulation）。



$n = 7$，　$n - 2 = 5$　　$n = 9$，　$n - 2 = 7$

圖 3

要證明這回事，最方便是使用數學歸納法。（凸多邊形的情況不使用數學歸納法是更精簡；凹多邊形的情況，數學歸納法的威力才顯現出來！）第一步是證明任意多邊形必有一條對角線，即是說，它連接多邊形的兩個端點，而且，線的點完全落在多邊形內。（補充一點，這兒我們假定所有的多邊形都是單（simple）多邊形，就是沒有邊是自我相交；多邊形內也沒有洞，它的邊界是單一條不自我相交的折線。）如何得知呢？取任何一個端點 P，它有相鄰的兩個端點 X 和 Y，構作直線 XY。如果 XY 上的點都落在多邊形內，XY 便是對角線（見圖 4a）。如果 XY 與多邊形的某些邊相交，便有某些端點落在三角形 PXY 內，只有有限個這樣的端點。設 Z 是這些端點當中最接近 P 的一個，則 PZ 是一條對角線（見圖 4b）。

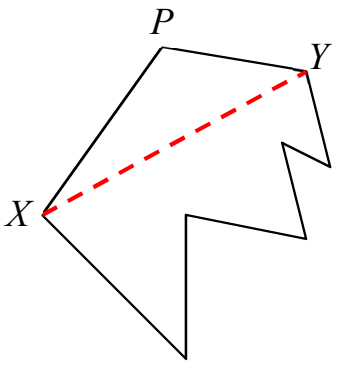


圖 4a

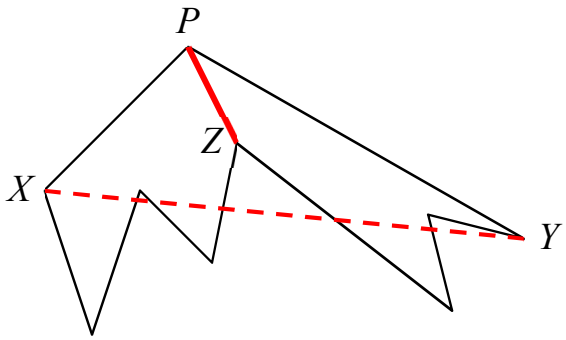


圖 4b

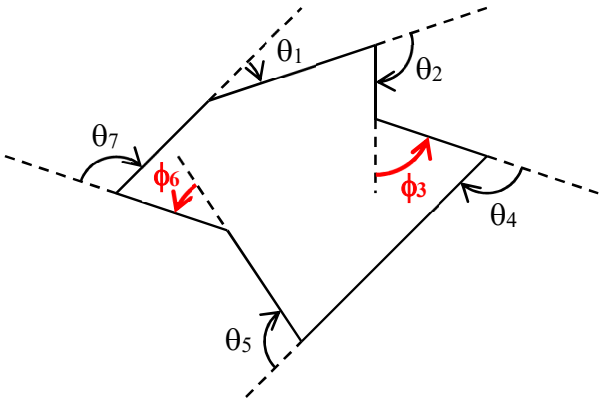
於是，任何 n 邊形 $\mathcal{N}$ 都可以分成兩個邊數較 n 為小的多邊形 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$，邊數分別是 n_1 和 n_2。（在圖 4a 中，$\mathcal{N}_1$ 是 PXY，$\mathcal{N}_2$ 是 $X\cdots Y$。在圖 4b 中，$\mathcal{N}_1$ 是 $PX\cdots Z$，$\mathcal{N}_2$ 是 $PZ\cdots Y$。）假設 $\mathcal{N}_1$ 和 $\mathcal{N}_2$ 都有一個三角劃分，合起來 $\mathcal{N}$ 便有一個三角劃分了。（這兒用到數學歸納法第二原理，即是先

證明對某 k_0，$P(k_0)$ 成立，再從 $P(k)$（$k \le n$）成立推論 $P(n)$ 成立。）最後，證明不論如何進行三角劃分，n 邊形都是由 $n-2$ 個三角形合成。把這個結果記作 $H(n)$，於是

$$\begin{aligned} H(3) &= 1 = 3-2\,, \\ H(n) &= H(n_1)+H(n_2) = (n_1-2)+(n_2-2) \\ &= n_1+n_2-4 = (n+2)-4 = n-2\,, \end{aligned}$$

根據數學歸納法（第二原理），定理證畢。

讓我再加一段尾聲（Coda），並不涉及數學歸納法：有一個更具深遠意義的定理，從它馬上得到 n 邊形內角和是 $(n-2)\pi$。那定理就是：n 邊形的外角和是 2π（與 n 無關！）為何如此呢？把凸多邊形其中一條邊順時針方向繞一圈，走遍全部 n 條邊，繞成的角是 2π，正好是全部外角的和。由於每個內角與它相應的外角合成一個平角，於是內角和便是 $n\pi-2\pi=(n-2)\pi$ 了。至於凹多邊形的情況是否類似呢？是的，只不過在凹多邊形的情況，我們要注意如何界定外角，在「凸端點」與「凹端點」有些分別，即是正和負。當選定某條邊繞一圈的時候，在「凸端點」是順時針方向，在「凹端點」卻變成是逆時針方向了！但繞了一圈，把正負值計算在內，答案依然是 2π（見圖 5）。至於每個內角與相應外角的關係，又要注意分清楚「凸端點」與「凹端點」的情況。讀者不妨自己試作計算，便得出內角和也是 $(n-2)\pi$。



$$\text{外角和} = \theta_1+\theta_2-\phi_3+\theta_4+\theta_5-\phi_6+\theta_7 = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{內角和} &= (\pi-\theta_1)+(\pi-\theta_2)+(\pi+\phi_3)+(\pi-\theta_4)+(\pi-\theta_5)+(\pi+\phi_6)+(\pi-\theta_7) \\ &= 7\pi-(\theta_1+\theta_2-\phi_3+\theta_4+\theta_5-\phi_6+\theta_7) = 7\pi-2\pi = 5\pi \end{aligned}$$

圖 5

結語

在以上六節中，我們見到數學歸納法的一些應用。雖然數學歸納法貌似是一種運用邏輯的妝扮工夫，而且還要「未卜先知」其答案，才能發揮所長。其實掌握了數學歸納法的本質精神，也可以用它來探究及發現結果，以上的一些例子說明了這一點。

二十多年前，我寫過一篇文章，討論了一類頗富趣味的謎題，涉及數學歸納法更微妙的應用，有興趣的讀者，不妨找來看看：蕭文強，人貴自知（以己度人？），《數學教育》EduMath 9（1999 年 12 月），11 – 18 頁。

讀罷這六節後，讓我們回到開首的問題：「數學歸納法」是歸納思考方式乎？抑或是演繹思考方式乎？你說呢？

作者電郵：mathsiu@hku.hk