

數學中的問題解決

傅海倫

山東師範大學數學系

1980年4月，以美國數學教師全國聯合會(NCTM)的名義，公佈了一份名曰《行動綱領 – 80年代數學教育的議程》的文件，首次提出必須把問題解決(problem solving)作為80年代中學數學的核心。在1980年8月的第四屆國際數學會議上，美國數學教師協會提出了80年代中學數學教育行動計劃的八點建議，指出80年代中學數學教育改革焦點是培養學生問題解決的能力，這種力量衡量個人和國家數學水平的標誌。到1988年召開的第六屆國際數學教育會議上，則將問題解決列為大會的七個主要研究課題之一，在課題報告中，幾次明確提出問題解決、模擬化和應用必須成為從中學到大學的所有數學課程的一部份。這樣，在美國和國際數學教育會議的推動下，問題解決受到了世界各國數學界普遍重視，不僅成為國際數學教育界研究的重要課題，而且是繼「新數運動」和「回到基礎」之後興起的80年代和90年代國際數學教育發展的潮流。

一、對「問題」的理解

對「問題」的理解與關於甚麼是「問題解決」的分析直接相關，討論和研究「問題解決」的一個主要困難就在於對甚麼是真正的「問題」缺少明晰的一致意見。

當代美國著名數學家哈爾莫斯(P.R.Halmos)曾說：「問題是數學的心臟。」

美籍匈牙利著名數學教育家波利亞(G.Polya)在《數學的發現》一書中曾給出問題明確含義，並從數學角度對問題作了分類。他指出，所謂「問題」就是意味著要去尋找適當的行動，以達到一個可見而不立即可及的目標。《牛頓大詞典》對「問題」的解釋是：指那些並非可以立即求解或較困難的問題 (question)，那種需要探索、思考和討論的問題，那種需要積極思維活動的問題。

在 1988 年的第六屆國際數學教育大會上，「問題解決、模型化及應用」課題組提交的課題報告中，對「問題」給出了更為明確而富有啓發意義的界定，指出一個問題是對人具有智力挑戰特徵的、沒有現成的直接方法、程序或算法的待解問題情境。該課題組主席奈斯 (M.Niss) 還進一步把「數學問題解決」中的「問題」具體分為兩類：一類是非常規的數學問題；另一類是數學應用問題。這種界定現已經逐漸為人們所接受。

我國的張奠宙、劉鴻坤教授在他們的《數學教育學》裏的“數學教育中的問題解決”中，對甚麼是問題及問題與習題的區別作了很好的探討，根據他們的思想觀點，我們可對「問題」作以下幾個方面的理解和認識。

- 問題是一種情境狀態。這種狀態會與學生已有的認知結構之間產生內部矛盾衝突，在當前狀態下還沒有易於理解的、沒有完全確定的解答方法或法則。換句話說，所謂有問題的狀態，即這個人面臨著他們不認識的東西，對於這種東西又不能僅僅應用某種典範的解法去解答，因為一個問題一旦可以使使用以前的算法輕易地解答出來，那麼它就不是一個問題了。

- 問題解決中的「問題」，並不包括常規數學問題，而是指非常規數學問題和數學的應用問題。這裡的常規數學問題，就是指課本中既已唯一確定的方法或可以遵循的一般規則、原理，而解法程序和每一步驟也都是完全確定的數學問題。
- 問題是相對的。問題因人因時而宜，對於一個人可能是問題，而對於另一個人只不過是習題或練習，而對於第三個人，卻可能是所然無味了。另一方面，隨著人們的數學知識的增長、能力的提高，原先是問題的東西，現在卻可能變成常規的問題，或者說已經構不成問題了。例如，學生在學習因式分解之前，對於「求方程： $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ 的解」，構成問題，而在學習了因式分解之後，已熟練地掌握了 $a \cdot b \cdot c = 0$ ；則 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$ ，那麼，此時前述求方程的根已對他不構成問題了，而當前狀態下對於「求方程 $x^3 - 6x^2 - 4x = 6$ 的根」則構成一個問題。
- 問題情境狀態下，要對學生本人構成問題，必須滿足三個條件：(1)可接受性。指學生能夠接受這個問題，還可表現出學生對該問題的興趣。(2)障礙性。即學生當時很難看出問題的解法、程序和答案，表現出對問題的反應和處理的習慣模式的失敗。(3)探索性。該問題又能促使學生深入地研究和進一步的思考，展開各種探究活動，尋求新的解題途徑，探求新的處理方法。
- 問題解決中的「問題」與「習題」或「練習」是有區別的，其重要區別在於：(1)性質不同。中學數學課本中的「習題」或者「練習」屬於「常規問題」，教師在課堂中已經提供了典範解法，而學生只不過是這種典

範解法的翻版應用，一般不需要學生較高的思考。因此，實際上學生只不過是在學習一種算法，或一種技術，一種應用於同一類「問題」的技術，一種只要避免了無意識的錯誤就能保證成功的技術。(2)服務的目的不同。儘管有些困難的習題對大部份學生實際上也可能是真正的問題，但數學課本中的習題是為日常訓練技巧等設計的，而真正的問題則適合於學習發現和探索的技巧，適合於進行數學原始發現以及學習如何思考。因此，練習技巧與解真正問題所要達到的學習目的不大相同，也正因為它們各自服務於一種目的，所以中學教學課本中的「習題」、「練習」不應該從課本中被除去，而應該被保留。然而，解決了這些常規問題後，並不意味著已經掌握了「問題解決」。

二、一個好問題的「標準」

以問題解決作為數學教育的中心事實上集中體現了數學觀和數學思想的重要變化，也即意味著數學教育的一個根本性的變革，正是在這樣的意義上，著名數學教育家倫伯格指出：解決非單純練習題式的問題正是美國數學教育改革的一個中心論題。

那麼，從數學教育的角度看，究竟甚麼是一個“好”的問題，它的標準該是甚麼？一般來說，一個好問題標準應體現在以下三個方面：

其一、一個好問題應該具有較強的探究性。

這就是說，好問題能啓迪思維，激發和調動探究意識，展現思維過程。如同波利亞所指出的「我們這裡所指的問題，不僅是尋常的，它們還要求

人們具有某種程度的獨立見解、判斷力、能動性和創造精神」。這裡的「探究性(或創造精神)」的要求應當是與學生實際水平相適應的，既然我們的數學教育是面向大多數學生的，因此，對於大多數學生而言，具有探索性或創造性的問題，正是數學上「普遍的高標準」——這又並非是「高不可及」的，而是可通過努力得到解決的。從這個意義上來說，我們這裡說的好問題並不是指問題應有較高的難度，這一點與現在數學奧林匹克競賽中所選用的大部份試題是有區別的。在競賽中，「問題解決」在很大程度上所發揮的只是一種「篩子」的作用，這是與以「問題解決」作為數學教育的中心環節和根本目標有區分的。

其二、一個好問題，應該具有一定的啟發性和可發展空間。

一個好問題的啟發性不僅指問題的解答中包含著重要的數學原理，對於這些問題或者能啟發學生尋找應該能夠識別的模式，或者通過基本技巧的某種運用很快地得到解決。同時，「問題解決」還能夠促進學生對於數學基本知識和技能的掌握，有利於學生掌握有關的數學知識和思想方法，這就與所謂的「偏題」、「怪題」劃清了界線。

一個好問題的可發展空間是說問題並不一定在找到解答時就會結束，所尋求的解答可能暗示著對原問題的各部份作種種變化，由此可以引出新的問題和進一步的結論。問題的發展性可以把問題延伸、拓廣、擴充到一般情形或其他特殊情形，它將給學生一個充分自由思考、充分展現自己思維的空間。

其三、一個好問題應該具有一定的「開放性」。

好問題的「開放性」，首先表現在問題來源的「開放」。問題應具有一定的現實意義，與現實社會、生活實際有著直接關係，這種對社會、生活的「開放」，能夠使學生體現出數學的價值和開展「問題解決」的意義。同時，問題的「開放性」，還包括問題具有多種不同的解法，或者多種可能的解答，打破「每一問題都有唯一的標準解答」和「問題中所給的信息都有用」的傳統觀念，這對於學生的思想解放和創新能力的發揮具有極為重要的意義。

三、「問題解決」見解種種

從國際上看，對「問題解決」長期以來有著不同的理解，因而賦予「問題解決」以多種含義，總括起來有以下 6 種：

1、把「問題解決」作為一種教學目的。

例如美國的貝格(Begle)教授認為：「教授數學的真正理由是因為數學有著廣泛的應用，教授數學要有利於解決各種問題」，「學習怎樣解決問題是學習數學的目的」。E.A.Silver 教授也認為本世紀 80 年代以來，世界上幾乎所有的國家都把提高學生的問題解決的能力作為數學教學的主要目的之一。當「問題解決」被認為是數學教學的一個目的時，它就獨立於特殊的問題，獨立於一般過程和方法以及數學的具體內容，此時，這種觀點將影響到數學課程的設計和確定，並對課堂教學實踐有重要的指導作用。

2、把「問題解決」作為一個數學基本技能。

例如美國教育諮詢委員會(NACOME)認為「問題解決」是一種數學基本技能，他們對如何定義和評價這項技能進行了許多探索和研究。當「問題解決」被視為一個基本技能時，它遠非一個單一的技巧，而是若干個技巧的一個整體，需要人們從具體內容、問題的形式、**構造數學模型**、設計求解模列的方法等等綜合考慮。

3、把「問題解決」作為一種教學形式。

例如英國的柯可可勞夫特(Cockcroft)等人認為，應當在教學形式中增加討論、研究問題解決和探索等形式，他還指出在英國，教師們還遠遠沒有把「問題解決」的活動形式作為教學的類型。

4、把「問題解決」作為一種過程。

例如《21 世紀的數學綱要》中提出「問題解決」是學生應用以前獲得的知識投入到新或不熟悉的情境中的一個過程。美國的雷布朗斯認為：「個體已經形成的有關過程的認識結構被用來處理個體所面臨的問題」此種解釋，可以使一個人使用原先所掌握的知識、技巧以及對問題的理解來適應一種不熟悉狀況所需要的這樣一種手段，它著重考慮學生用以解決問題的方法、策略和猜想。

5、把「問題解決」作為法則。

例如在《國際教育辭典》中指出，「問題解決」的特性是用新穎的方法組合兩個或更多的法則去解決一個問題。

6、把「問題解決」作為能力。

例如 1982 年英國的《Cockcroft report》認為那種把數學用之於各種情況的能力，稱之為「問題解決」。

綜合以上各種觀點，雖然對「問題解決」的描述不同，形式不一，但是，它們所強調的有著共同的東西，即「問題解決」不應該僅僅理解為一種具體教學形式或技能，它應貫穿在整個教學教育之中。「問題解決」的教學目的是很明確的，那就是要幫助學生提高解決實際問題能力，而且「問題解決」的過程是一個創造性的活動，因而是數學教學中最重要的一種活動。以下是從文獻中對「問題解決」的六個不同的概念：

- (1) 解決教科書中標題文字題，有也叫做練習題；
- (2) 解決非常規的問題；
- (3) 邏輯問題和「遊戲」；
- (4) 構造型問題；
- (5) 計算機模擬題；
- (6) 「現實生活」情境題。

在「問題解決」中，相當一部份是實際生活中例子。從構造數學模型、設計求解模型的方法，再到檢驗與回顧等整個過程要由學生去發現、去設計、去創新、去完成，這是「問題解決」與創造性思維密切聯系之所在。數學教師應創造更有利於問題解決的條件，在為所有年級編制出好的問題並傳授解決問題的技能、技巧的同時，盡力為學生的創造性思維提供良好

的課堂環境與機會、乃至服務。

四、 數學問題解決的心理分析

1、 從學習心理學看「問題解決」

從學習心理學角度來看，問題解決一般理解為一種認知操作過程或心理活動過程。所謂「問題解決」指的是一系列有目的指向認知操作過程，是以思考為內涵、以問題為目標定向的心理活動過程。具體來說，問題解決是指人們面臨新的問題情境、新課題，發現它與主客觀需要的矛盾而自己缺少現成對策時，所引起的尋求處理問題辦法的一種心理活動過程。問題解決是一種帶有創造性的高級心理活動，其核心是思考與探索。認知心理學家認為，問題解決有兩種基本類型：一是需要產生新的程序的問題解決，屬於創造性問題解決；一是運用已知或現成程序的問題解決，是常規性問題解決。數學中的問題解決一般屬於創造性問題解決，不僅需要構建適當的程序達到問題的目標，而且更側重於探索達到目標的過程。

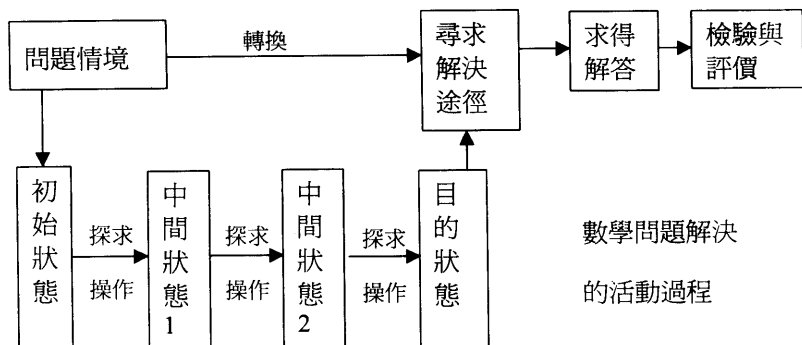
問題解決有兩種形式的探索途徑：試誤式和頓悟式。試誤式是對頭腦中出現的解決問題的各種途徑進行嘗試篩選，直至發現問題解決的合理途徑。頓悟式是在長期不懈地思考而又不得其解時，受某種情境或因素的啟發，突然發現解決的方法和途徑或方式。對中學生而言，這兩種探形式都是問題解決不可缺少策略。

2、 數學問題解決心理過程

現代學習心理學探究表明，問題分為三種狀態，即初始狀態、中間狀態

和目的狀態。問題解決就是從問題的初始狀態開始，尋求適當的途徑和方法達到目的狀態的過程。因此，問題解決實質上是運用已有的知識經驗，通過思考探索新情境中問題結果和達到問題的目的狀態的過程。

以數學對象和數學課題為研究客體的問題解決叫做數學問題解決。一般來說，數學問題解決是在一定的問題情境中開始。所謂問題情境，是指問題的刺激模式，即問題是以甚麼樣的形態、方式組成和出現的，其內涵包括三個方面：第一、個體試圖達到某一目標；第二、個體與目標之間存在一定的距離，它將引起學生內部的認知矛盾衝突；第三、能激起個體積極心理狀態，即產生思考、探索和達到目標的心向，從而刺激學生積極主動的思維活動。因此，數學問題解決是從問題情境開始，運用已有的知識經驗，克服認知矛盾衝突，積極主動地尋求和達到問題結果的過程。著名數學教育家波利亞在《怎樣解題》一書中指出：「數學問題解決過程必須經過下列四個步驟，即理解問題、明確任務；擬定求解計劃；實現求解計劃；檢驗和回顧。」根據上述分析，數學問題解決過程可用框圖示如下：



以上關於問題解決的過程討論，數學問題解決在一定的問題情境中開

始，要求教師根據問題的性質、學生的認識規律和學生所學知識的內部聯系，創造一種教學中問題情境，以引起學生內部的認知矛盾衝突，激發起學生積極、主動的思維活動，再經過教師啓發和幫助，通過學生主動地分析、探索並提出解決問題方法、檢驗這種方法等思維活動，從而達到掌握知識、發展能力的教學目的。

主要參考文獻

- (1) 張奠宙等:《教學教育學》，江西教育出版社，1991年
- (2) 李銘心:《數學教育學》，青島海洋大學出版社，1994年
- (3) 戴再平:“問題解決”，載張奠宙編《數學教育學導論》，江蘇教育出版社，1998年
- (4) 傅海倫:課題情境與數學問題解決，載《數學通報》，1994年10月