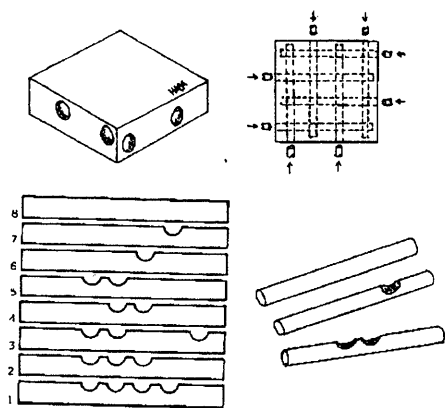


從一件簡單的裝嵌玩具談起

黃家鳴

香港中文大學課程與教學學系

最近朋友送我一件簡單小巧的裝嵌玩具，是木製、很樸素的那種。她說看到這是德國的產品，特意買來，以慰我對遠方懷念之情。這件玩具名為 Crux，乃德國南部一玩具生產商 Habermas 的產品 [註 1]。



它的組件頗為簡單 (見附圖)：正方形厚身的木塊一件 (約 86mm × 86mm × 26mm)，其四側均有兩個垂直於側面鑽得深深卻未完全穿過木塊的圓洞，對邊的兩對圓洞在位置上互相交錯，而相鄰的側面上的兩對圓洞則一對偏上、另一對偏下。另外還有八條粗幼長短一樣的圓柱狀木棒 (長約 90mm，直徑 12mm)，其大小恰好可以插入

木塊圓洞中而留下一小截末端。其中七條木棒上面則削有一個至多達四個的半圓形凹坑，這些凹坑所在乃對應於插入圓洞後相交於其餘四個圓洞的位置（細節可參見附圖）。而由於裝嵌後木棒之間共有 8 個相交位置，凹坑總數為 16。

這件玩具的玩法也很簡單，只要將八條小木棒的末端完全塞進八個圓洞之內，裝嵌起來便成。當你嘗試插入兩三條木棒，自然發覺若木棒之間的凹坑位置未能互相匹配的話，在方形木塊內部會互相頂撞而不能順利滑入圓洞底部。隨便多試幾下插入不同的木棒，便會意識到木棒因凹坑位置設計各異而必須按某種次序插入方能順利完成裝嵌的過程。

雖然只是簡單的一件玩具，原來也並不容易完成裝嵌的。有人拿來一試，足足舞弄了半小時仍在原地踏步，一籌莫展。而另一位借回家玩，歸還時同樣是未能解決的。我雖然沒有機會細心觀察他們嘗試裝嵌時的各種策略和運作，但我估計他們在試錯 (trial and error) 過程中忽略了抓緊各條木棒的凹坑特徵與其在木塊之內一一插入時相互間之 **動態** 關係來進行裝嵌，又或者只看著八條木棒在空間中互相搭配的可能性的問題而忘了插入木塊之內時有著非常嚴格的次序限制（前者的多種可能性不一定能符合後者的要求），因此很多時間是白費掉的。

Crux 作為一件立體玩具，我相信可以給中小學生提供一個培養空間想像力的機會。或者你有興趣先知道我又怎樣成功裝嵌這件東西，其實我只是試著安插了一會，就開始考慮次序的問題、安插程序與凹坑的關係等。花了點時間想通了，在腦海中構思著不同的運作程序，隱約找到了規律，於是拿起幾條木棒一試便成功了，時間不過是廿多分鐘。可能我通過自由玩耍 (free play) 階段很快便看到一些結構上的主要特徵和關係，從而能夠在思維中建構足夠豐富的圖像表徵 (imagery) 來進行思想實驗 (Gedankenexperiment) 和探究，最後洞悉了成功裝嵌的竅門。我對這件玩具的空間結構有一定的印象，寫本文前的確想過設計簡單的符號系統來表達意會到的關係和竅門，並且我也隱約覺得裝嵌次序只有一個，希望通過一個符號表象系統證明這個估計中的唯一性 (uniqueness)，但卻不成功。截稿在即，這項工作惟有留給各位讀者繼續努力了。

我在這裏詳細分享這項經驗，目的主要是帶出在把玩立體玩具時，我們思維中的圖像和運作其實可以通過內省而加深我們對空間思考的認識，以致強化空間想像力。而作為教師，這種個人經驗的內省也有助於我們明瞭一些立體數學遊戲在數學教育上的意義 [註 2]，從而可以更好地協助學生在這類遊戲中發展有效的遊戲策略，進而提高他們的空間思考能力。

還值得一提的是，當我嘗試在國際互聯網上尋找 Habermas 這公司時，發現該公司本身似乎沒有網頁，但亦與另外一些公司有聯營的關係，可以在網上訂購他們的一些產品。而更令我雀躍的是找到一個數學家的網頁上有解決另一 Habermas 玩具的詳細說明，並且他還將很多數學趣題、遊戲和玩具分門別類加以討論，值得大家閱覽。其網址為：

<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/>

令我最感意外的，網頁所在地正是那曾留學三年、群山連綿、綠草如茵的 Bielefeld 大學校園。這份久別重逢的驚喜，自是朋友送我這件禮物時所未有料到的。

註釋：

[1] Habermas GmbH, D-96476 Rodach, Germany. (註冊商標為 HABA®)。Crux 之產品編號為 Spiel Nr. 2487。

[2] 有興趣的讀者請參閱黃毅英先生〈立體數學遊戲與空間想像力之訓練〉一文。原載《數學傳播》，1990年14卷4期，頁78-96。重印於黃毅英(1997)《邁向大眾數學的數學教育》，九章出版社(台北市)，頁294-328。