

兩個訓練領袖的數學遊戲

龍德義

一九九八年夏天，香港中文大學教育學院第二次舉辦暑期資優課程，對象仍是經學校推薦資賦優異及成績超卓的初中學生。這次夏令營有一個主題：「同創造、齊領導、踏上成功路」。筆者亦有份參與其中，負責主持一個與數學有關的工作坊。雖然主辦當局並無規定工作坊必須與夏令營的主題配合，但筆者相信能夠與主題配合的工作坊更能令營友對主題作進一步的探究。

工作坊由兩個小時的課節所組成，分兩天進行。筆者選用了兩個遊戲作為第一天的教材，一個叫 QUARTO，另一個叫 SET。至於第二天的教材則選用了四個簡單的智力問題。這四個問題較為人所認識，而且很多書刊均已提及，故此只列於附錄一內，並列出筆者期望帶出的信息，不在此論述。

至於 QUARTO 與 SET 遊戲，則很少機會在書刊中出現，筆者在此詳加介紹這兩個遊戲。

首先介紹 QUARTO 遊戲，它是兩人對奕的棋盤遊戲。兩位參與者輪流在一個 4×4 的棋盤上放置棋子，每顆棋子均具四種屬性：

顏色、高度、形狀、空實。遊戲目的是儘可能將 4 顆附著一種共同屬性的棋子排成一條直線（類似「過三關」遊戲，不過這次要「過四關」）。詳細的規定可參考附錄二。當然仍有些重要的遊戲規則要注意，譬如：棋子是由對手挑選給自己擺放的；就算擺放了一排 4 顆符合要求的棋子，但擺放者未能及時察覺的話，亦不算是勝利者，險些還會拱手將勝利讓給對手。

透過 QUARTO 遊戲，筆者希望讓那些資優青少年親身體會到很多時候我們只會注意棋子的某一種屬性，譬如是棋子的顏色或其高度，很容易忽略它的其他屬性，譬如是形狀或空實。作為一個好的小組領導者必須認識並兼顧小組成員的各方面的不同屬性，好讓他們得以發揮其長處，可能的話，改善其短處。QUARTO 遊戲背後的教育目的亦可應用於「解決難題」上：很多時我們須要專注解決難題中的一些小問題，但亦應不忘經常作全面的考慮、評估，以防顧此失彼的錯犯。

若要嚴格界定，QUARTO 算不上是一個數學遊戲，雖然它涉及高矮、形狀等數學概念，但遊戲背後的技巧並不涉及數學原理，亦無任何必勝的法則。多玩十數次，或已掌握遊戲的竅門，對奕雙方均審慎放棋子和選棋子，這時和局的機會很高，或可嘗試遊戲進階

的建議，可以排成直線或小正方形的 QUARTO。相信加上這變化後，遊戲參與者要考慮的將增加不少。

至於 SET 遊戲的遊戲規則詳列於附錄三。乍眼看來 SET 遊戲與 QUARTO 遊戲很不相同，SET 遊戲是紙卡遊戲並非棋子遊戲，它有點像撲克牌的「釣魚」遊戲和「配對」遊戲，只不過今次要組合成為一個 SET 需要三張紙牌而非兩張。另一方面 SET 遊戲的紙牌卻與 QUARTO 遊戲中的棋子同樣地擁有 4 種屬性——即是形狀、顏色、數量、網底。而且正如 QUARTO 遊戲一樣沒有兩張紙卡是完全相同的。SET 遊戲的紙卡每一種屬性均有三個不同的狀態，例如：有紅、綠、紫三色；有外框、填滿、斜紋的網底。故此，QUARTO 遊戲有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 顆棋子（4 種屬性，每種屬性有兩個不同狀態）；而 SET 遊戲則有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 張卡紙。

籠統來說，SET 遊戲是 QUARTO 遊戲的進階遊戲，它比 QUARTO 遊戲較具數學味道。工作坊當日，一些對圖形、數量、類別有敏銳觸覺的營友明顯佔了很大的優勢。筆者選用 SET 遊戲作為教材亦希望能強化 QUARTO 遊戲背後的教育目的：作為一個好的領導必須顧及整體並作全面的考慮。就那次工作坊的觀察可知，遊戲參與者多能從犯錯當中領會這個教育目的。值得一提的是觀察速度較快的參

與者得益較多。因為他們若能正確找到 SET，他們便獲得成功感；反之若作出錯誤的判斷，他們便能體會到顧及全面 4 種屬性的重要性。那些觀察速度較別人慢的參與者大部份時間都來不及作出反應，以致很難從遊戲中得益，讀者或可想想如何補這方面的不足。

數學味道濃的另一個原因是 SET 遊戲涉及如何系統地檢查翻開的 12 張卡紙當中任何 3 張均不能組成一個 SET。夏令營當天，一位來自上海的數學特級教師顧老師便即場示範了這個「系統搜尋」的技巧，並獲得工作坊內學員報以熱烈的掌聲。顧老師對這兩個遊戲甚感興趣，筆者亦盡點主人家的責任，送贈他 QUARTO 及 SET 遊戲各一以作紀念。

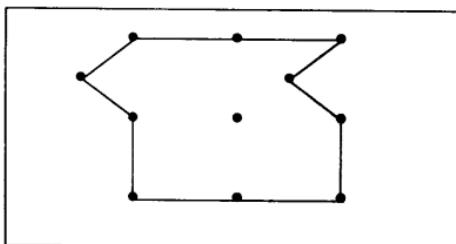
筆者亦嘗試在日常的教學課堂上進行 QUARTO 遊戲。曾經在替代患病同事的代課時間進行；亦有趁同學於長假期前沒有心情上課的情況下進行。從同學的反應和投入程度，得知效果不俗。

若問及數學遊戲滲入正規課程中有何困難的話，教材製作是其中困難之一。試想想，要製作一副 SET 遊戲的紙卡，我們要印製或繪畫 81 張不同的紙卡，多麻煩啊！不如乾脆買一副好了。不過要全班 40 人參與其中至少需要七、八副才行。費用不少啊！有時候，若多動腦筋，我們可以將一些現成的製成品改裝，又或者買一些合

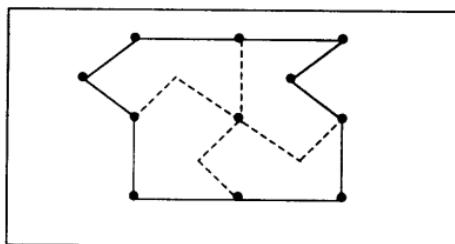
適的材料自行製作，既可省點錢亦可縮短製作時間。筆者於月前到木材店舖買了一支丁方和一支圓柱形 8 呎長的木條回校，在工藝科何老師的協助下在學校工場製作 6 副 QUARTO 遊戲。買兩條木方用去 60 元，棋盤過膠用的膠片用去 10 元，盛載棋子的膠盒用去 60 元。當然，那 6 副 QUARTO 遊戲實質的成本不止 130 元，要再加上學校工場的機器、人工費用等等。在此，筆者只想建議對這方面感興趣的數學老師可與工藝科、美術科或家政科老師合作指導學生自行製作一些他們上課用的數學遊戲教材亦無不可。況且這些製作亦可當作那些科目的其中一項習作。可謂一舉兩得，亦甚具教育意義。

附錄一(a)

問題一：

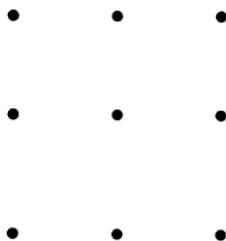


請加上線段，使上圖分成五份形狀完全相等的部份。或許下圖對你會有些幫助，它們是四份形狀完全相等的部份。



遊戲的信息：問題中某些明顯的條件不一定有助於解決問題，有時甚至會成為解題的障礙。不要為自己設定過多的假設。譬如：錯誤假設加入的線段將會經過正中央的那顆黑點。

問題二：

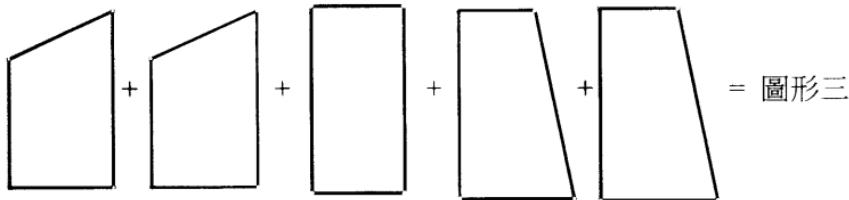
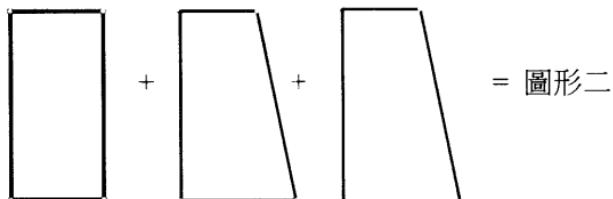
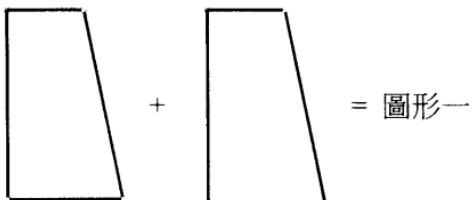


嘗試利用 4 條相連的線段串起上圖 9 點，並且於繪畫時筆不離紙。

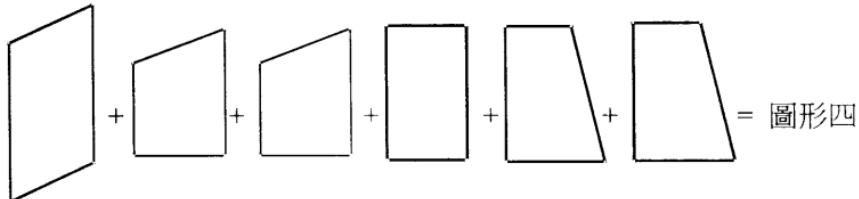
遊戲的信息：正如上一題，若錯誤假設加上線段的端點必須落在那九點上的話，問題將不能被解決。

附錄一(b)

問題三：研究以下圖形的規律，嘗試填寫下面句子。



(a) 圖形一至圖形三均為 形。



(b) 圖形一至圖形四均為 形。

遊戲的信息：每當有新的圖片加入，原本符合條件的組合可能不管用了。新與舊的圖片將要重新組合。過份假設某些部份組合的必然性，可能有礙取得整體的成功。

問題四：

試問能否將任何一個三角形剪成三份後拼合成一個長方形？

若能，怎樣分割？

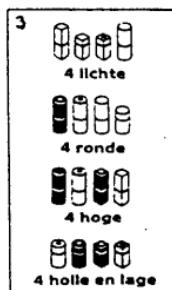
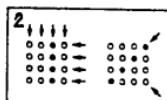
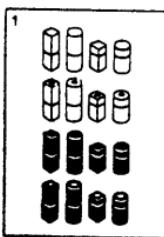
若否，又有哪種類型的三角形可行呢？哪種不可行？

遊戲的信息：擴散性思考的訓練；分割的方法並非只有一個。引發的問題不單是如何分割？還有，如何查証分割方法是否正確？

附錄二

QUARTO

棋盤由 4×4 個圓圈組成。全棋共有 16 顆不同的棋子，每顆棋子附著 4 種屬性：顏色（淺色或深色）、高度（矮或高）、形狀（圓或方）、空實（空心或實心）。（圖一）



4 顆淺色棋子
4 顆圓形棋子

4 顆高的棋子

4 顆矮且空心的棋子

遊戲目的：

設法將排成一直線（不論是橫、直或對角）的（圖二）4 顆棋子附著一個共同的屬性。（圖三）

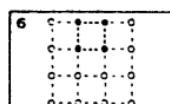
遊戲規則：

兩人輪流選出一顆棋子給對手，讓對手放置於棋盤的空圓圈上。直至有一方勝出或全部棋子放於棋盤上。

最先一方叫“QUARTO”者為勝方。這一方可以是放下一顆棋子從而構成擁有共同屬性的一條直線（橫、直或對角也可）的一方。（其他三顆棋子並不需要是他／她放置的）

這一方亦可以是「非放置棋」的一方。當對方構成共同屬性的一條直線後，仍未有發覺，並且已選出另一顆棋子。當接到棋子後，便可叫出“QUARTO”，並清楚指出那條直線。

若雙方都不能及時叫出“QUARTO”，即那條擁有共同屬性的直線將失效。遊戲亦要繼續進行。



遊戲進階：

設法將排成一直線或一個「小正方形」的（圖六）4 顆棋子附著一個共同的屬性。

附錄三

SET

遊戲目的：

從 12 張面向上的卡中，儘快找出組成一個「集」（SET）的三張卡。

遊戲介紹：

每張遊戲卡都有下列 4 種屬性：

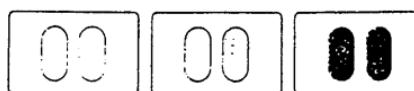
形狀：藥丸、蟲子、菱形，

顏色：紅色、綠色、紫色，

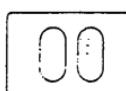
數量：一個、二個、三個，

網底：外框、填滿、斜紋。

一個「集」（SET）是由三張卡組成，它們的每一個屬性必須是完全相同或是完全不相同。例如下列圖例：



紅色



紅色



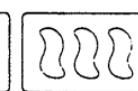
紅色



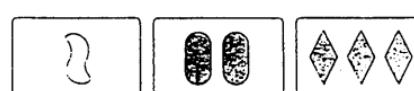
綠色



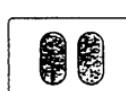
紅色



紫色



紫色



綠色



紅色

檢驗「集」的金科玉律：如果其中兩卡相同，而另一卡則不同，則這個不是「集」。



紅色



紅色



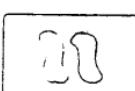
紅色



紅色



綠色



綠色

遊戲過程：

遊戲的適當人數為四或五人。每人輪流負責派牌。派牌的參與者將 12 張卡牌面向上排成 3×4 的長方形。參與者儘快找出組成一個「集」的三張卡，其中最快叫出“SET”的參與者便能提取那三張卡（當然必須要由其他人查核正確）。當查驗是否合乎規格時，遊戲應暫時停止，任何人不能再叫“SET”。直至負責派牌的參與者補回三張卡於桌上，遊戲始再繼續。

若各人均同意 12 張卡當中沒有包括任何「集」，即多添三張卡於桌上，但無需維持多於 12 張卡的狀況，除非沒有「集」。

記分及勝負：

成功取得一個「集」得一分、錯誤叫出“SET”的扣一分。當每人均擔任一次派牌工作後，得分最多者為勝方。