

由一道小學數學競賽題說起

馮振業

香港教育學院數學系

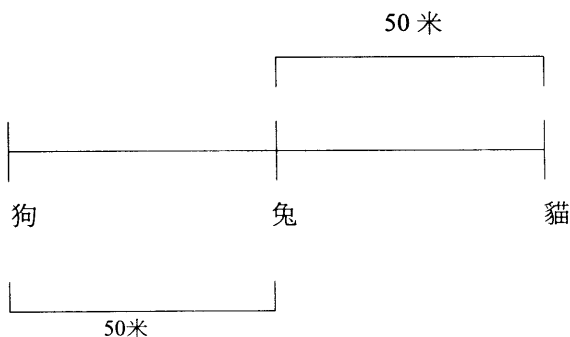
有人認為，數學競賽可以提高數學文化。故勿論同意與否，卻不能否認解競賽題是有其挑戰性和吸引力的，一則可以消閒，二則可以鍛練腦筋。

一次偶然機會，筆者碰到以下一道小學數學競賽題：

狗、兔和貓在一條直線的跑道上進行賽跑，開始時，兔在狗前面 50 米，貓在兔前面 50 米，十時正牠們同時開跑，十時零二分，狗追上了兔。十時零三分，狗追上了貓，問兔追上貓是十時幾分？

看了一遍，覺得這題擬得不錯，處境簡單易明，計算也不繁複，但卻要求答題者清楚明白各量之間的關係。更令人高興的，是多掌握一些高年級的數學知識不見得可佔上優勢。以下是筆者估量擬題者的解題藍圖：

起始的相對位置可以圖示如下：

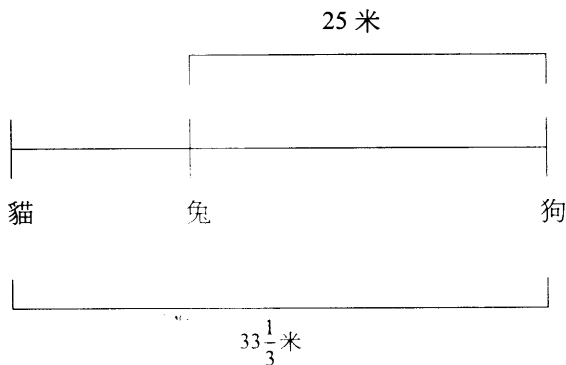


開跑後，

狗比兔每分鐘多走 $\frac{50}{2}$ 米 = 25 米

狗比貓每分鐘多走 $\frac{50+50}{3}$ 米 = $33\frac{1}{3}$ 米

假設狗、兔、貓於同一位置沿同一方向同時起步，則一分鐘後的相對位置可以圖示如下：



看圖之後，不難求得

$$\text{兔比貓每分鐘多走 } 33\frac{1}{3}\text{米} - 25\text{米} = 8\frac{1}{3}\text{米}$$

若兔要追回起始時落後於貓的 50 米，則需時 $\frac{50}{8\frac{1}{3}}$ 分鐘 = 6 分鐘。因

此，兔於十時零六分追上貓。

本以為這個猜測錯不到哪裏，豈料賽會於賽後發給參賽者的題解竟然是這樣的：

將 100 米分爲 6 份，2 分鐘狗比兔多跑 3 份，3 分鐘狗比貓多跑 6 份，2 分鐘狗比貓多跑 4 份，因此 2 分鐘兔比貓多跑 1 份。開始時，兔與貓相差 3 份，因此要 $2 \times 3 = 6$ (分鐘) 才能追上。

別的不說，爲甚麼要把 100 米分爲 6 份呢？這個「6」是怎樣跑出來的呢？第一步已叫人摸不著頭腦，不懂如何解題的小朋友們，看過此題解之後，會明白一切嗎？縱然有人細心閱讀而至明白答案如何求得，恐怕亦只會留下數學純是「天才」的玩意兒，普通人難以置喙！這樣的題解不單不能釋疑，還可能挑起更多疑竇，令人對數學望而生畏。

如果讀者不小心，可能會以為這個「6」是由求2（來自狗用了2分鐘追上兔）和3（來自狗用了3分鐘追上貓）的最小公倍數所得，事實卻不然。我們不妨更改一些數值來看：

起始時兔在狗和貓的中點上，而狗用了3分鐘追上兔，
用了5分鐘追上貓。

用上述賽會建議的解法，假設把狗和貓之間的距離分成 x 份。那麼，3分鐘狗比兔多跑 $\frac{x}{2}$ 份，5分鐘狗比貓多跑 x 份，3分鐘狗比貓多跑 $\frac{3x}{5}$ 份。因此3分鐘兔比貓多跑 $\left(\frac{3x}{5} - \frac{x}{2}\right)$ 份 = $\frac{x}{10}$ 份。開始時，兔

與貓相差 $\frac{x}{2}$ 份，因此要 $3\left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{10}}\right)$ 分鐘 = 15 分鐘才能追上。

爲了做到 $\frac{x}{2}$ ， $\frac{3x}{5}$ 皆爲整數，必須取 x 爲 2 和 5 的公倍數，最小的便是 10，這數並非 3 和 5 的最小公倍數！細心的讀者，可能已看出，這個 2 來自狗與兔之間的起始距離是狗與貓之間的起始距離的 $\frac{1}{2}$ ，而 5 則來自狗追貓用上 5 分鐘。

從以上的討論可知，賽會題解的「6」絕非顯而易見，若不加以詮釋，恐怕一般學生均會感到不明所以。

這個由賽會提供的題解雖然陷阱重重，但也牽起不少有趣的相關討論。例如

- (1) 狗、兔、貓之間的距離是否解題的必要資料？
- (2) 如果兔的起始位置並非狗與貓的中點，對解題方法有何影響？
- (3) 如果把狗、兔、貓之間的距離換成這些距離的比，將如何解題？
- (4) 若更進一步把追上時間的實值換成相應的比，可否解題？
- (5) 在上面兩組數據下，答案時間均為題中兩追上時間的最小公倍數，一般而言是否仍舊成立？

教師大可藉著這些問題，培養高小至初中的學生的數學觸覺和分析能力。