

國中數學科個別化教學設計原理

柳賢 台灣高雄師範大學

本教學設計採取階梯型多元多價模式(Hierarchical Multivalent Model)¹，並根據皮亞傑(Piaget)認知發展的原理設計其內容，且按照學生的學習型態及興趣，設計其學習的活動方式。

台灣自實施九年國民教育以來，國中教育已由原來選擇性的教育改變為非選擇性的教育，因而使得學生個別差異更加嚴重。為適應學生個別差異，教育當局曾採若干措施，諸如：資優班、升學班與就業班、能力分班、學科成就班等方式，但其效果不彰，反而造成學生缺乏自信，對前途悲觀，且使學生產生敵對反抗的態度，對學生人格發展也形成不良的影響。

個別化教學設計乃是針對改善這種不正常的教育症狀而設計。此設計考慮到整個教學過程中的所有因素並在不改變現有班級制度下，靈活運用班級教學體制來發揮個別化功能的一種教學設計，期使教育真正能適應個別差異。

班級教學應顧及事實，使學生之個別差異能藉適當的教材及教學活動。提供他們完整的學習機會。根據「蘭嶼、七股與高雄市國民學生認知能力之調查研究報告」²顯示，目前我國的國中學生大部分屬具體操作期，有部分已進入形式操作期，並有極少數仍停留在前操作期；同時發現同一年級的學生，他們認知層次也有不同的差異存在，因此教材的編寫應有不同層次的差異，使能適應學生個別的認知能力。此外，學生由於環境、興趣及程度的不同，他們對於學習數學的類別也會有不同的偏好，所以對教材的安排也應該有不同性質的區別，使學生提高學習興趣，讓他們自己願意進行學習。

數學科個別化教學設計是將目前的國中數學教科書重編重寫，形成一種能適應上智、中庸、低愚三個層次的教材。學習活動設計是

¹ 參見林生傳著：建立國民教育階段個別化教學模式的理論與實際，高雄師院教育學刊第二期，六十九年九月。

² 參見高雄師院物理系撰印：蘭嶼、七股與高雄市國中學生認知能力之調查研究，七十年十二月。

以單元(Unit)方式呈現，每一單元均列出具體目標，終點行為，進行學習活動及診斷測驗。教材來源兼顧現有教科書及補充教材。由現有教科書提出基本觀念，設計成為所有學生皆必須學習且能學會的核心教材，及一些較低層次的選擇性學習教材。而補充教材則設計成為較高層次的選擇性的學習教材，提供屬於上智的學生進行學習，讓他們自己發揮，不必由教師用壓力強迫他們學習，對於低愚學生只要通過了簡單易學的核心教材，便算已經完成該單元學習，因此並不會讓他有趕不上進度的感覺，使其對於學習數學建立學習的信心興趣，因而使他有成就感，如果行有餘力，他也可以嘗試學習實用性的選學教材，逐漸的可以培養出進取積極學習態度。對於中庸程度的學生，在通過核心教材學習後可以自行選擇實用性或傳統性選學教材進行學習。而對上智程度的學生，當他們很快的完成核心教材學習之後，馬上提供他們創造性教材學習活動。由於創造教材富有趣味性及挑戰性，因此能滿足上智者的需要。如果這些創造性的選學教材仍無法滿足上智程度生的學習需求，另外安排一些與該單元相關的課外參考書籍，提供他們進行學習。這一種教學方式能滿足每一位學生的各自需要，不會使教師照顧了某一層次的學生而忽略了其他層次的學生。

本設計最大的特色在於提供學生可以依照自己的興趣及能力來決定所學習教材的層次及類別，學生對於每一單元學習完全根據在該單元核心教材的學習活動中所獲得的基本知識及興趣偏向來決定選擇那一類教材進行學習，此一方式教學效果，預料將較教育部目前已研擬完成且將從九四年開始實施的國民中學選修科目依類別分組上課辦法所得的效果較理想。

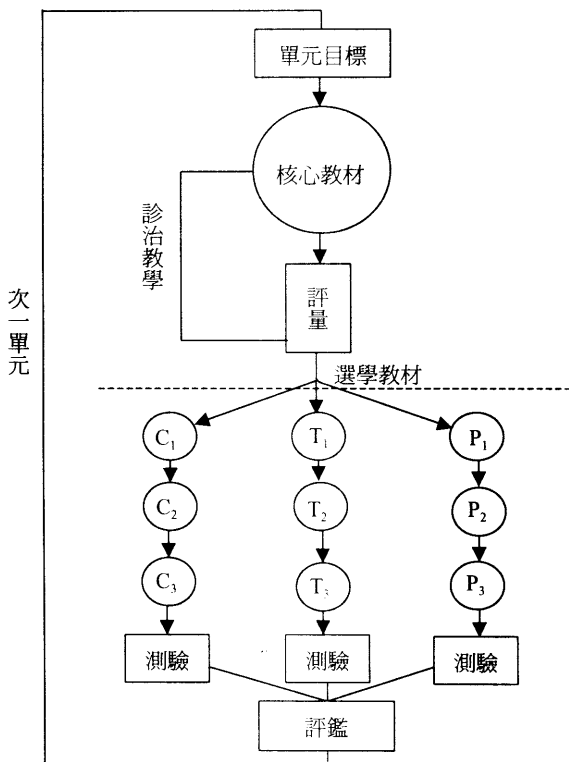
由於數學是一門讓學生自己去發現與學習的科學，因此學習活動方式盡量採用實驗活動方式，讓學生從「做」中學習，先由具體著手，然後漸趨抽象，並適當的利用媒體，進行學習，從而引發學生學習興趣，提高效果。材內容偏重實例並配合生活經驗，引入基本觀念，以發現規律，同盡量予以趣味化，使學生體會觀念的通俗及無所不在，充分表現啟發性的教學特色。

教材每一單元的學習過程均分成兩個階段，第一階段為基礎的學習，以核心教材配合核心活動為學習過程，第二階段為選擇性的學習，以操作、演習、推理方式進行學習。其中心教材及核心活動均以知識(Knowledge Level)及理解(Comprehension Level)較低層次的學習為其教學目標，希望能讓全班學生皆能接受並吸收，即使能力程

度最差的學生亦能感受學習的成就感，因而提高他們學習的興趣與心願，不至於像過去的國中生，由於教材的不當而使若干學生厭惡數學，終至於放棄數學。而造成了數學教育的偏差。

在選擇性的學習教材方面為顧及學生之能力、興趣及學習方式的差異，而將學習教材區為實用性的 P 教材、傳統性的 T 教材及創造性的 C 教材，同並將教材深度區為「1」級(代表基本層次，包含知識及理解層次)，「2」級(代表中等層次，包含理解及應用層次)及「3」、「4」級(代表高層次，由應用層次以上各層次所組成的教材)，希望能藉著不同性質、不同層次以及不同的學習活動方式，而照顧到每一位學習者，使他們皆能發揮最大的潛在能力，不論資賦優異或資賦較差的學生，能因為學習所成就而提高了他們學習數學的興趣，也不會再讓家長覺得他們的子弟學習數學有所挫折。

每一單元個別化學習活動之流程圖：



個別化教學設計單元示例： 因數與倍數

本單元包含核心教材及選學教材兩部分

核心教材內容有：

1. 閱讀資料
2. 核心活動
3. 自我評量

選學教材內容有：

1. 實用性學習活動
活動 P₁
活動 P₂
2. 傳統性學習活動
活動 T₁
活動 T₂
3. 創造性學習活動
活動 C₁
活動 C₂

本單元學習指引

你必須先完成本單位之核心教材的學習，並進行自我評量，然後才能進行選學教材的學習，選學教材依性質分為 P 教材（實用性），T 教材（傳統性），及 C 教材（創造性）並依程度分為二級，1 級較容易，2 級較難些，你可以依照自己的興趣、能力和老師的從旁指導與建議，自行選擇你喜歡的選學教材進行學習。

核心教材

在自然數的除法裏，如果除數能整除被除數時，就有

$$\text{被除數} = \text{除數} \times \text{商}$$

其中被除數、除數及商，都是自然數。由這個除法的關係，可以用來說明因數和倍數的問題。例如自然數 3 能被 1 整除，其商為 1，因此自然數 3 可以寫成

$$3 = 1 \times 3$$

所以 1 與 3 都能整除 3，這兩個自然數 1 與 3 都叫做 3 的因數；而 3 叫做 1 的倍數，也叫做 3 的倍數。

由上例說明，在自然數的整除運算式中，除數與商都叫做被除數的因數；被除數叫做除數的倍數，也叫做商的倍數。

一般來說，如果用符號 a ， b ， c 來代表自然數，且有

$$a = b \times c$$

則 b 與 c 都能整除 a ，因此 b 與 c 都叫做 a 的因數； a 叫做 b 的倍數，也叫做 c 的倍數。例如

自然數 12 可以寫成

$$12 = 1 \times 12$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$12 = 3 \times 4$$

由上面這些等式，可以知道 1，2，3，4，6，12 都能整除 12，因此這些自然數都叫做 12 的因數；而自然數 12 就叫做這些自然數的倍數。

如果 a 代表任意一個自然數，則有

$$a = 1 \times a$$

所以，1 與 a 本身都是 a 的因數；反過來說，任意自然數 a 是 1 與 a 本身的倍數。由此可知，1 是任意自然數的因數，而任意自然數都是 1 的倍數。

一個自然數所有因數的個數是有限的，除了 1 以外，其他每個自然數至少有兩個因數，但有些自然數僅有兩個因數，例如

自然數 11 僅有兩個因數 1 與 11，這一種自然數就叫做質數。

一般來說，一個質數是大於 1 的一個自然數，它只能寫成 1 與本身的乘積；換言之，也就是除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，那這個自然數就稱為質數。例如

自然數 2 僅有因數 1 與 2；寫成兩個自然數乘積，只有一種方法，即

$$2 = 1 \times 2$$

而且 $2 \neq 1$ ，所以 2 是一個質數，也是最小的質數。

如果一個大於 1 的自然數，除了 1 和本身以外，還有別的因數，這個自然數就叫做合數。例如

自然數 12 不是一個質數，因為 12 除了有因數 1 和 12 之外，還有因數 2，3，4，6，所以，12 是一個合數。而自然數 1 不是質數，也不是合數。

在上述 12 的因數 1，2，3，4，6，12 中，2 與 3 是 12 的因數，也是質數，叫做 12 的質因數。

爲了應用方便，從 1 到 100 之間的質數，把它們寫在下面，供做參考。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

核心活動 1. 質數與合數 (分組活動)

(一) 活動目標

1. 理解質數、合數的意義。
2. 能辨別一個自然數是否爲一質數。
3. 能辨別一個自然數是否爲一合數。

(二) 活動教材

1. 正方形積木 72 塊 (每組 12 塊)。
2. 磁鐵板及黏上磁鐵積木 12 塊。

(三) 活動指引

1. 說明四邊形的圖形。
2. 指導學生利用方形積木排成四邊形圖形。
3. 指導學生記錄不同個數的積木，所能排出不同形狀的四邊形個數。
4. 說有如何由記錄表中發現質數與合數所出現的規律。

(四) 進行活動：(分組活動)

核心活動 2 自然數的因數分解

(一)活動目標

1. 理解因數的意義。
2. 能找出一個自然數的因數。
3. 理解質因數的意義。
4. 能把一個自然數寫成質因數的乘積。
5. 理解因數分解的意義。

(二)活動教材

1. 自然數 6 的因數分解掛圖一幅。
2. 自然數 12 的因數分解掛圖一幅。

(三)活動指引

1. 指導學生利用整除，找出一個自然數的因數。
2. 指導學生找出質因數的方法。
3. 說明如何由三角形的圖表中，寫出一個自然數的因數分解。

(四)進行活動（個別活動）

活動 1. 質數與合數（分組活動）

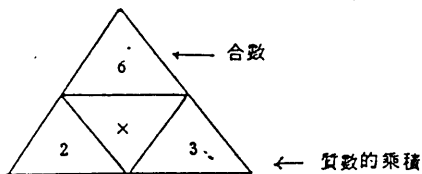
1. 將每塊方形積木之邊長作為一長度單位。每組先取二塊方形積木，利用此二塊積木看看可排成多少個不同形狀之四邊形，並記下所排成四邊形的個數。
2. 將三塊方形積木，利用此三塊積木看看可排成多少個不同形狀之四邊形，並記下不同形狀之四邊形個數。
3. 將四塊方形積木，排成四邊形圖形，並記下排成多少個不同形狀之四邊形。
4. 依照上面，繼續將 5 塊，6 塊，7 塊積木，排成四邊形，並記下所排成不同形狀之四邊形的個數分別為多少？
5. 下列表中， n 表示方形積木的塊數， T 表示不同形狀四邊形之個數，由上面所得的結果，從 $n = 1$ 到 $n = 10$ ，填入 T 之值。

積木塊數 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
不同形狀四邊形之個數 T									

6. 根據上表，有些積木的個數只能排成一種四邊形，這種數稱為質數，而能排成一種以上不同形狀的四邊形積木個數，稱為合數。
7. 說明上表中的質數有那些？合數有那些？

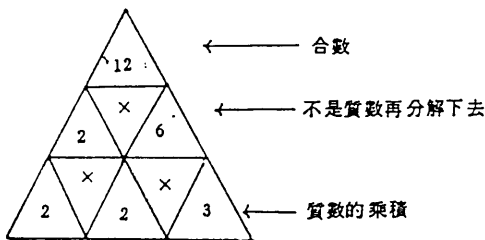
活動 2 自然數的因數分解

一個自然數的因數分解，就是把這個自然數分解成質因數的乘積，而質因數的求法，可從質數中的最小質數 2 開始，順次一個一個的來試驗，能整除這個自然數的質數，就是這個自然數的質因數，下面將利用圖形來表示自然數 6 的因數分解：



所以， $6 = 2 \times 3$ 就是 6 的因數分解。

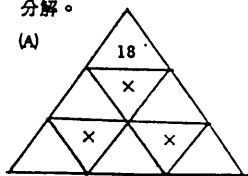
1. 仿照上面的方法，12 的因數分解，可表示如下：



所以， $12 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$ ，這是 12 的因數分解。

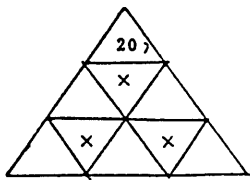
2. 請在下面三角形空格內，填入適當數字，並寫出 18，20，36，60 的分數分解。

(A)

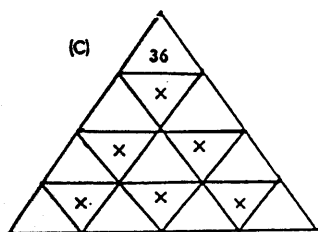


$18 = \underline{2} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$ 就是 18 的因數分解。

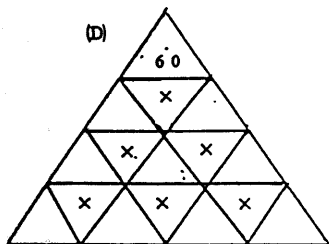
(B)



$20 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$ 就是 20 的因數分解。



$36 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$ 就是 36 的因數分解



$60 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$ 就是 60 的因數分解

如果你已經完成核心教材的學習活動，請進行下面的自我評量：

單元 1 自我評量

請選出正確的答案，填入前面的括號內

1. () 那一個自然數是 9 的因數：① 2 ② 3 ③ 6 ④ 18。
2. () 那一個自然數是 4 的倍數：① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8。
3. () 42 的因數個數有 n 個，則 $n =$ ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8。
4. () 三位數中，11 的倍數共有多少個？① 79 ② 80 ③ 81 ④ 90。
5. () 若四位數 $474\square$ 是 3 的倍數，但不是 10 的倍數，則其個位數 \square 是：① 3 的倍數 ② 4 的倍數 ③ 5 的倍數 ④ 7 的倍數。

活動 P₁ 因數的應用

準備 60 公分長的細繩三條，剪刀一把及刻有公分單位的直尺一支：

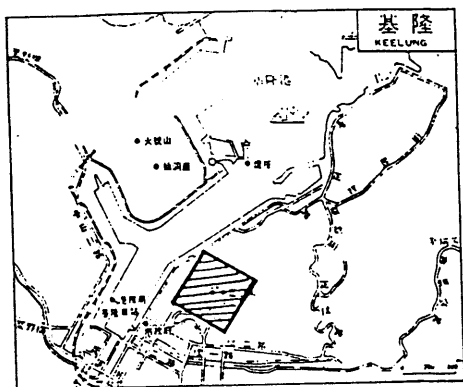
- ① 計算一條 60 公分長的繩子，二等分以後，每一等分的長度 = _____ 公分。
請實際拿一條細繩（60 公分長），剪成相等長度的兩段，並用尺量一量，每段的長度 = _____ 公分，然後比較一下，看看你計算出來的答案和所量的長度是否一樣？ _____。
- ② 計算一條 60 公分長的繩子，三等分以後，每一等分的長度 = _____ 公分。
請實際拿一條細繩（60 公分長），剪成相等長度的三段，並用尺量一量，每段的長度 = _____ 公分，然後比較一下，看看你計算出來的答案和所量的長度是否一樣？ _____。
- ③ 計算一條 60 公分長的繩子，四等分以後，每一等分的長度 = _____ 公分，
請實際拿一條細繩（60 公分長），剪成相等長度的四段，並用尺量一量，每段的長度 = _____ 公分，然後比較一下，看看你計算出來的答案和所量的長度是否一樣？ _____。

活動 P₂ 倍數的應用

1. 建材行把邊長為 4 公分的正方形木磚，貼在長方形的紙上，然後再出售；如果長方形紙張，長為 24 公分，寬為 20 公分，問每張紙上面，應貼多少塊木磚才能貼滿。

- ① 先計算紙的長度是木磚邊長的幾倍：_____，就是 $24 = 4 \times$ _____。
- ② 再計算紙的寬度是木磚邊長的幾倍：_____，就是 $20 = 4 \times$ _____。
- ③ 利用步驟①和②，求出的兩數，就可計算，每張紙要貼 _____ 塊木磚。
- ④ 請在教材箱中取出，長為 24 公分，寬為 20 公分之白紙一張，將每邊都是 4 公分長木磚，排在白紙下層，算算看，你用了多少塊木磚，才從白紙的左邊排到右邊？這一層有木磚 _____ 塊。
- ⑤ 繼續再排第二層，並算算看，排滿這一層共用木磚 _____ 塊。
- ⑥ 依次再往上一層排上木磚，共可排 _____ 層，每層木磚都有 _____ 塊。因此，排滿白紙共用木磚 _____ 塊。
- ⑦ 請把步驟⑥中得到的答案和步驟③求出的答案，比較一下，看看是否相同。

2. 一塊正方形的公園，在地圖上，每一邊的長度為 1 公分，如果實際長度是地圖上長度的 40000 倍，那麼此塊方形公園的實際邊長 = _____ 公分 = _____ 公尺，而由邊長的平方，可以求出它的實際面積 = _____ 平方公尺。



活動 T₁

1. 五位数 $13a65$ 有質因數 3，其中 a 表示所缺少的數字，求 $a = ?$
2. 分解因數 876。
3. 寫出 360 的質因數有那些？其因數個數有幾個？
4. 三位數中，6 的倍數有幾個？
5. 什麼數是自然數 a 的因數，又是 a 的倍數？
6. 判斷下列各敘述，正確或錯誤。
 - (a) 1 是任意自然數的因數。
 - (b) 質數都是奇數。
 - (c) 任意自然數是它本身的倍數。
 - (d) 任意自然數的最大因數是它本身。

活動 T₂

1. 六位数 $125a34$ 有因數 33，其中 a 表示百位數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 若 $b = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 12$ ，則自然數 b 的質因數有多少個？ $\underline{\hspace{2cm}}$
3. 寫出其和 16 的兩質數？ $\underline{\hspace{2cm}}$
4. 從 1 到 100 的自然數中，共有 x 個偶數；而這些偶數中，是 3 的倍數者共有 y 個，則 $x - y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 下列五個自然數中，那些是質數？請把質數圈出來：
 139， 161， 324， 199， 957

活動 C₁ 自然數的因數個數

自然數 6 的因數有 1, 2, 3, 6 共有四個, 我們用 $f(6)$ 來表示 6 的因數個數, 因此, $f(6) = 4$ 。

1. 請分別求出 2, 3, 5, 7 的因數並計算它們的因數個數, 然後將適當的數字填入空格內:

自然數 n	2	3	5	7
n 的因數	___	___	___	___
$f(n)$	$f(2) =$ ___	$f(3) =$ ___	$f(5) =$ ___	$f(7) =$ ___

由上面表格中的關係, 可以得知:

如果 p 為一個質數, 則 $f(p) =$ _____。(由同學互相研討)

2. 請分別求出 4, 9, 25, 及 8, 27, 125 的因數, 並計算它們的因數個數, 然後將適當的數字填入空格內:

自然數 n	4	9	25	8	27	125
n 的因數						
$f(n)$						

根據上表, 可以得知:

如果 p 為一個質數, 則 $f(p^2) =$ _____, $f(p^3) =$ _____。

3. 自然數 35 有兩個質因數 5, 7, 因數分解為 $35 = 5 \times 7$, 它的因數有 1, 5, 7, 35, 所以 $f(35) = f(5 \times 7) =$ _____; 而自然數 $50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$, 它的因數有 _____, _____, _____, _____, _____, _____, 所以 $f(50) = f(2 \times 5^2) =$ _____, 因此, 如果 p, q 為質數, 且 $p \neq q$, 則 $f(pq) =$ _____, $f(pq^2) =$ _____。

4. 先求出 36 的因數，再寫出 $f(36) = f(2^2 \times 3^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，並得到 $f(p^2q^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ (其中 p, q 為質數且 $p \neq q$)
5. 你能否預測 $f(72) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，並實際算算看，72 的因數個數是否和你預測的相同。

活動 C. 數字遊戲

1. 寫出任何一個三位數，然後將它重複寫成一個六位數。(例如 1 2 3 重複寫成 1 2 3 1 2 3)。
2. 上述這個六位數能否被 7 整除？能否被 11 及 13 整除？
3. 試試看，另選一個三位數，按照前面的方法將它重複寫成一個六位數，同樣以 7, 11, 13 分別去除它，是否照樣能整除呢？
4. 預測看看，是不是所有三位數重複寫成的六位數的數字都有因數 7, 11, 13？
5. 若將(1)中的三位數，乘以 1001 後，其結果與原來三位數的數字有何關係？
6. 設原來的三位數是 x ，則依次重複一遍後的六位數恰好等於 $1001x$ ，試一試 $1001x$ 能否被 7, 11, 13 整除嗎？
7. 寫出任何一個兩位數，依次重複二次，將它寫成一個六位數。(例如 47, 重複二次而成 474747)，然後試試看，這種六位數是否含有因數 3, 7, 13, 37 呢？
8. 你能否證明這個數字遊戲必定為正確嗎？