# 淺談數學概念表象在數學教學上的一些問題（下）

黃家鳴 香港中文大學課程與教學學系

上文我們已經提過外在表象往往可以起著一種指涉作用，令學習者在思考層面觸發相對應之內在表象從而進行有關之運作及思考。但我們也必須注意另一項事實，就是當學習者已經熟習某一種符號運算過程時，符號運作本身便可以完全按著熟習的運算規則自動進行而不必經常提示學習者其指涉的數學對象的實際意義或內容。就以最簡單的「解方程」過程而論，等號兩邊數量相同這個意念在初學時一直協助學生理解解方程的每一步驟，最後求得方程的解。但當學生熟知這種解方程的技巧時，符號層面本身的運作意義已有足夠的「承托力」來支撐每一步運算而毋需再考慮其指涉的數學意義。

又或者可以這樣說，純熟的符號運作促成了在符號操作層次上某種實存 (ontological reality) 意義的建立，符號運作本身的方式、規律已儼然擁有其合理的必然性。即如以分數的加和乘爲例，它們在符號的形式運作 (formal operation) 上是截然不同的：

$\frac{a}{b}*\frac{c}{d} = \frac{a*c}{b*d}$ 只有當「*」是乘法運算時才對；

即如 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1\times 3}{2\times 4}$，但 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4} \neq \frac{1+3}{2+4}$。

在學習這些計算時，教師會利用各種模型來解釋或誘導學生明白分數加法爲何需要通分母，而乘法又爲何可以這樣直截了當地分別計算分子、分母的乘積。無疑這些模型、解釋必須依賴於這些符號所涉及的分數本身的涵義，也就是說必須連繫於分數概念本身才能被正確地理解。但當計算純熟到一定程度，反過來說，我們又會覺得 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{2}{4}+\frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = 1\frac{1}{4}$ 理所當然，而寫出 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{1+3}{2+4}$ 是不可理喻的，卻忘了當初學分數加法時，我們或許也曾經認爲分子加分子、分母加分母是一個相當合理的做法呢。

這種在符號運算層次上脫離數學概念本身而生成的「合理性」和「自動化」有其重要性。試想想我們若在分數四則計算時每一步都要回歸到分數的基本概念，計算的速度必然慢得難以想像。我們之所以有這種符號系統作爲外在表象來處理數學問題，正在於其運算上帶來之簡便及效率。歷史上各種符號和運算方式的發展，也有其規律性，

其中符號的簡潔性和隨之而來的實效性、效率等往往正是重要的支配因素 (註三)。

以上的解說對於數學教學來說究竟有何意義呢？抽象一點說，對於熟習了數學內容和運算方式的教師，這一個角度的認識可以重新引發教師思考，不以熟識習慣的事物爲理所當然。這點對於教學非常重要，因爲教師若不能讓思考重回學習的起點，看到初學者可能會經歷的難關、疑點和問題，就無從以他們可以理解的方式來向他們講解，也無從協助他們建立概念、掌握運算的意義。具體一點來說，上述解說令我們明白符號運算和概念認識之間有著千絲萬縷的辯證關係：沒有符號或圖象等作爲外在表象來表達數學概念和關係，就不可能有互相溝通數學思考的共同媒介，概念認識談何容易。反過來說，缺乏概念理解的符號運算只會變成純粹的符號操作，數學學習就變得舉步維艱 (註四)。

教師在教學時要做的，正是在適當時候將數學概念、關係與其外在表象諸如符號、圖象等通過解說或闡釋特定的問題或處境而連繫起來，而在另一些適當的時候，卻又能以外在表象本身爲對象來進行運算或推導所需的結果。至於如何判斷某個時刻恰當的處理手法，端視學習者在理解上的進展程度而定，這乃是教師的經驗和專業判斷了。不過可以這樣說，能夠經常將數學概念、關係及其不同的外在表象方式連繫一起來探究、討論，必然對學生學習數學有所裨益 (註五)。

數學概念的學習，在不同階段有著不同抽象程度的外在表象，亦可以存在不同但同樣有效的表象方式。大致來說，在數學教學中涉及的外在表象有以下五種方式：

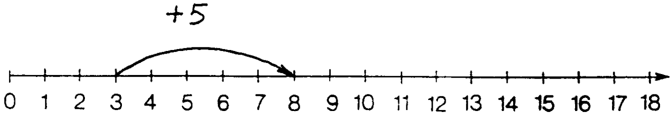
1. 涉及有關的數學概念的具體處境，而其中相關的數學資訊、特徵有所突顯。(例如引導小孩子學習比較數量大小時雖有不同的具體處境，但基本上均以數量爲觀察及討論的焦點。)
2. 可操弄 (manipulate) 的又或用以表達某些數學概念、關係的實物模型和教具。
3. 圖畫、圖形、圖象、圖表。
4. 語言、文字的表達。
5. 符號、數式等。

在教學過程中我們經常會穿梭於這五種不同的表象方式來講論、探討數學概念、關係和解決數學問題。因此教師在進行教學設計或反思教學時，不妨細看在課堂的不同時間怎樣運用這五種表象方式

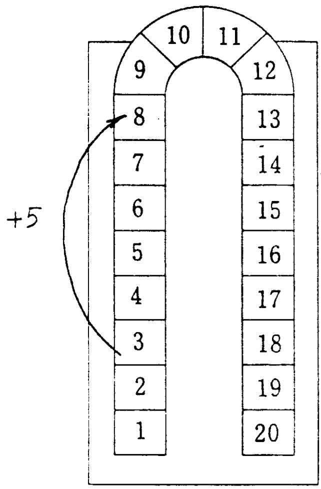
來闡述數學內容，以促進學生連結及靈活利用這些不同的表象方式。

就如在初小教授簡單加法時，我們除了教導學生用手指或實物數數來計算之外，亦會運用數線、甚或某些跳棋遊戲等表象方式來說明加法的計算。例如下圖的數線上，由 3 向前跳 5 步到達 8，以此來說明 3 + 5 = 8。又或者在跳飛機的遊戲中，由 3 向前再跳 5 步便到達 8，也是這個道理。

數線：3 + 5 = 8
(由 3 向前跳 5 步到達 8)




跳飛機遊戲：3 + 5 = 8
(由 3 向前再跳 5 步便到達 8)




而在教學上運用這些表象方式時，我們主要不在於期望小孩子利用這些方式來計算加數；他們當然可以這樣做，但也許不及利用手指頭來得那麼方便。與其說是用這些表象方式來輔助計算，毋寧說是爲了引入更多不同的具體表象方式來促進並深化學生對加法的多元理解。就課程的編排而言，我們也是趁這個機會讓學生初步接觸數線，通過對加法已有的知識來認識及探究數線的涵義和運算的表達方

式，從而積累對數線足夠的經驗和認識，擴充對數的相互關係 (例如：順序和倒序) 及運算的理解 (例如：加減互為逆運算 (inverse operation) 的具體表象)，並在更高年級時可以以此來作為理解正負數的一個有用的表象方式。

對教師來說，加法的概念已經達致相當高的抽象程度，其概念系統 (這裏指的是內在表象或心理表象) 中具體例子和情境已屬次要甚或沒有必要。但不可忽視的是，對初學者來說，所謂加法的概念，在其內在表象系統中，其實主要包含著對一系列相關的情境、具體例子等的理解 (註六)。正因如此，所以教師在設計教學時必須認真考慮不同表象方式對有關的數學學習的適切性。

近年數學教育界越來越強調在數學教學過程中數學表象的多元化，因為這樣可以加強學生以不同方式理解數學關係，促進學生掌握溝通數學的各種具體或抽象的工具。而更重要的是，表象方式的靈活性在解決難題方面有著正面的作用 (註七)。事實上不少學習數學的電腦軟件正是在電腦的影音介面上提供了多元化的 (外在) 表象的可能性，這種表象的多樣化正是值得數學教師加以思考和利用。

至於內在表象，文中其實一直避而不談，由於那是屬於個人思維世界的內容，既不容易掌握清楚，也不容易以語言文字表達，更甚者乃在於不同心理學派以此為爭論焦點之一，對所謂「心理表象」有相異甚大的詮釋 (註八)。既然教師在實際的教學工作中並不容易探究學生對數學理解的內在表象的各種細節，而上述對外在表象的探討大概已經為教學帶來了不少有用而值得思考的問題，在此讓我們暫且放下心理表象這個大難題吧。

***註釋***

註三： 關於數學符號和運算表達式的歷史發展可參看
Cajori, F. (1928-29/1993). ***A history of mathematical notations*** (two volumes bound as one). New York: Dover Publications.

註四： 較深入的分析請參看
Wong, K.M. (1994). Can mathematical rules and procedures be taught without conceptual understanding? ***Journal of Primary Education, 5***(1), 33-41.

註五： 較深入的分析請參看
Bromme, R., & Steinbring, H. (1994). Interactive development

of subject matter in the mathematics classroom. ***Educational Studies in Mathematics, 27,*** 217-248.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. ***Educational Studies in Mathematics, 22,*** 503-522.

註六： 對有關的心理學研究有興趣的讀者請參看

Smith, E.E., & Medin, D.L. (1981). ***Categories and concepts.*** Cambridge, MA: Harvard University Press.

Neisser, U. (Ed.). (1987). ***Concepts and conceptual development: Ecological and intellectual factors in categorization.*** Cambridge: Cambridge University Press.

註七： 例如最近一篇研究報告談到學習函數 (function) 概念時，教材中以四種方式 (包括文字、表列、圖象、數式) 來表達函數關係，可以促進及提高學生解決文字題的能力。請參看

Brenner, M.E., Mayer, R.E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B.S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. ***American Educational Research Journal, 34,*** 663-689.

註八： 請參看例如

Fodor, J.A. (1981). ***Representations: Philosophical essays on the foundations of cognitive science.*** Sussex, UK: The Harvester Press.