梵塔傳奇：數學規律的尋覓

羅浩源 顯理中學
蕭文強 香港大學數學系

『廟前的空地豎立了三支柱，位向正東方的一支疊放著六十四塊金片，在斜陽的照耀下閃閃生輝。大大小小的金片，排列有序，由上至下，金片一層一層增大。此際，但見方丈運起內力，金片在三支柱間穿梭飛舞。大師對眾徒說：每發一掌，須把一塊金片移到其餘兩支柱上，任擇其一。但須謹記，大金片不可壓在小金片上，以免走火入魔。等到六十四塊金片全部移到位於正西方的柱上，你的內力已臻登峰造極，可以下山了。』

每逢講解「數學歸納法」這個課題，上述的傳奇式故事總有機會流傳開來。從學生的眼神中看得出他們還是喜歡這個經典數學遊戲 —— 「河內塔」(TOWER OF HANOI)」—— 經渲染了的「武俠小說版本」。「河內塔」這個玩意，最先大抵是在1883年的巴黎流傳。當時市面上銷售的版本上面署名發明人是 N. CLAUS (DE SIAM)，看來是 LUCAS D'AMIENS 的化名，因此有人認為那其實是法國數學家 EDOUARD LUCAS (1849-1891) 想出來的玩意。當時適值法國開始覬覦安南(今之越南),進軍當地，河內這些地名不時出現在法國報章上，可能這個玩意便以此命名吧。

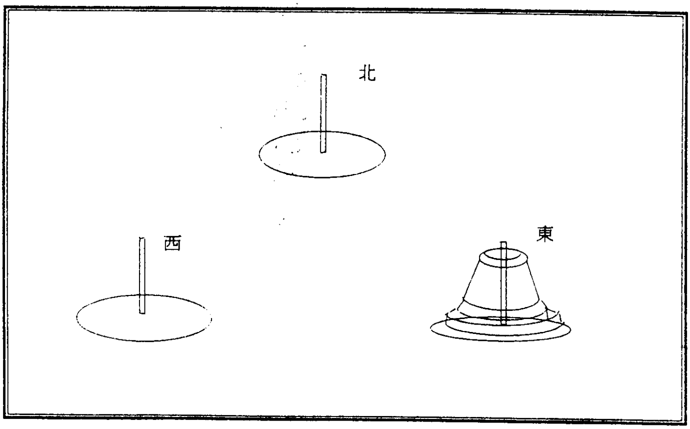

圖1

這個遊戲珍貴之處，在於讓學生在過程中尋找規律，也可以從過程中體會到「數學歸納法」的精神。不少學生只掌握了「數學歸納法」較機械化的一面，那其實是純粹演繹 (DEDUCTION) 而非歸納 (INDUCTION)。他們以爲只要把已知的公式對 $n=k$ 和 $n=k+1$ 的兩種情況寫下來，由前者推算出後者(再加上驗算 $n=1$ 的情況)，就算是學懂了「數學歸納法」。很少學生想到如何基於「數學歸納法」的精神去發現答案，就是運用倒推的手法，把問題一步一步化簡。（因此，那亦不是純粹歸納而已，雖然有時歸納可以導致合理的猜測。）

以下是一次師生對話的節錄：

教師：尋找規律，可從一些簡單情況入手。

甲生：明顯地，1塊金片只需1步。【拿了二塊移動。】用3步可以把2塊金片移往另一支柱上。

【片刻間，該生已發現用7步可以完成3塊金片的移動。大家花了不少時間才能確定分別以15步和31步可以完成4塊和5塊金片的移動。】

教師：相信大家已開始感受到移動大量金片所需的耐力吧！你們還有沒有興趣繼續移動6塊金片呢？

乙生：還是留待晚上睡不著才做吧！從這些獲得的結果。是否足以找到移動金片的規律呢？

教師：讓我們把這些結果寫下來看一看。【隨即在黑板上畫了以下的表：

金片數目	移動次數(m)	$m+1$
1	1	
2	3	
3	7	
4	15	
5	31	

並著學生完成該表。】

甲生：2、4、8、16、32、那不就是2的冪數嗎？ $m+1$ 應該是 2^N，對嗎？

教師：很好，所以移動次數很可能就是 $m=2^N-1$。

丙生：從這公式可以計算移動金片所需的次數，但如果要掌握移動金片的步法，這個結果似乎沒有用！

教師：說得好。不如你試把移動金片的情況詳細記錄下來。

【學生在教師的引導下完成下表：

$N=3$ 的移動情況

東柱	西柱	北柱	
1,2,3			
2,3	1		(金片1移往西柱)
3	1	2	(金片2移往北柱)
3		1,2	(金片1移往北柱)
	3	1,2	(金片3移往西柱)
1	3	2	(金片1移往東柱)
1	2,3		(金片2移往西柱)
	1,2,3		(金片1移往西柱)】

丙生：啊!原來移動7步中，金片1、2、3的移動次數分別是4、2、1。【該生馬上試完成 $N=4$ 的移動過程。】果然不出所料，移動4塊金片，金片1、2、3、4的移動次數分別是8、4、2、1。我們只須移動最大的金片1 次 ，但卻要把最小的金片移動8次。把最大的金片移動那一次後，問題不 就 是化爲移動3塊金片的情況嗎？

教師：非常有意思！你們現在可以解釋移動 N 塊金片的公式嗎？能否先把問題從 N 片化成 $N-1$ 片的情況去處理呢？

【眾學生繼續興高彩烈地討論,還得到更細緻描述移動金片的辦法，大家還估計了移動六十四塊金片所需的時間，此處不贅。】

現在讓我們看看如何證明需要移動 (至少) 2^N-1 次把 N 塊金片從東柱移到西柱。通常書本上作以下的解釋：

設 $f(N)$ 是移動(至少)次數，不難明白 $f(1)=1$。接著嘗試把 $f(N)$ 和 $f(N-1)$ 的關係找出來。先把上面 $N-1$ 塊金片從東柱移到北柱，用了 $f(N-1)$ 步，再用一步把第 N 塊金片從東柱移到西柱，然後把那 $N-1$ 塊金片從北柱移回到西柱第 N 塊金片上面，又用了 $f(N-1)$ 步。合起來共用了 $2f(N-1)+1$ 步，於是 $f(N)=2f(N-1)+1$。由 此不難算出

$$
\begin{aligned}
f(N) &= 2f(N-1)+1 = 2^2 f(N-2)+2+1 \\
&= 2^3 f(N-3)+2^2+2+1=\cdots \\
&= 2^{N-1} f(1)+2^{N-2}+\cdots+2^2+2+1 \\
&= 2^{N-1}+2^{N-2}+\cdots+2^2+2+1 = 2^N-1 \quad .
\end{aligned}
$$

【也可以用「數學歸納法」直接證明，那是假定已知公式爲 $f(N)=2^N-1$。】

仔細審視上述的解釋，你便察覺它只證明了不等式 $f(N) \le 2f(N-1)+1$, 也就是只證明了 $f(N) \le 2^N - 1$ 吧。我們還欠一步，即是證明 $f(N) \ge 2f(N-1)+1$。幸好這一步容易看出來，只用注意一點：要把最底第 N 塊金片從東柱移到西柱之前，必須把較小的 $N-1$ 塊金片全部移到北柱去。要這樣辦，至少已經用了 $f(N-1)$ 步。把那 $N-1$ 塊金片從北柱移到西柱，又至少用了 $f(N-1)$ 步，所以 $f(N) \ge 2f(N-1)+1$。

後面補充的一段話，通常給忽略掉，也許因爲只有三支柱，這回事像明顯不過。假如有四支柱，不等式便不明顯了，而且那其實是錯的！假如有四支柱，仍然設 $f(N)$ 是移動(至少)次數。固然，我們仍然有 $f(N)=1$和 $f(N) \le 2f(N-1)+1$，因此仍然有 $f(N) \le 2^N - 1$。但這次眞正的 $f(N)$ 和$2^N - 1$ 相差可能不少。舉一個簡單情況爲例，有3塊金片和東、南、西、北四支柱，已經知道 $f(3) \le 2^3 - 1 = 7$，但其實移動5次已足夠，而且$f(5)$眞的是5，不是7(見下面的表）。

東柱	南柱	西柱	北柱
1,2,3			
2,3	1		
3	1		2
	1	3	2
	1	2,3	
		1,2,3	

讀者不妨試計算 $f(4)$ 和 $f(5)$。一般而言，N 塊金片和 K 支柱的「河內塔」需要移動(至少)多少次，似乎仍然是一個懸疑未決的問題呢。

梵塔的傳說包含著多姿多采的數學內容，在教師的適當引導下，學生在遊戲過程中自當體驗到尋覓數學規律的樂趣。