論全等三角形與相似三角形的教學安排

—— 兼談「五行證明」的教學

梁子傑
退休中學教師

楔子

在 1999 年出版的《中學課程綱要　數學科　中一至中五》中，「全等及相似」這個課題是放在同一個學習單位之中。但到了 2020 年出版的《初中數學課程闡釋》中，這個部分卻被分割成兩個學習單位，一個叫做「全等三角形」，另一個叫「相似三角形」。如此的轉變有甚麼意義呢？這安排有甚麼優點和缺點呢？有沒有更好的處理辦法？

原因

據說，把全等和相似分開成兩個學習單位有兩個主要原因，其中一個與中點定理和截線定理的證明有關。

在 1999 年的《課程綱要》提出之後，有教科書以「兩邊成比例且夾角相等」這條件，利用一對相似三角形來證明中點定理。不過，有數學家指出，這是一個「大錯特錯」的做法！根據《幾何原本》的安排，相似三角形的三個判定條件都是從截線定理所推得的，如果我們又似相似三角形來證明中點定理或截線定理，那麼無疑就是犯了循環論證的錯誤！（箇中的邏輯論句並非本文的主題，有興趣的讀者，請參考以下文章：梁子傑、黃毅英、蕭文強（2008）。課程設計上的「古為今用」—— 以「截距定理」和「中點定理」為例。《數學教育》26 期，3 – 10。）不過，有教師指出，按照當時的課程編排，由於在中一時已經引入了相似三角形，因此到中三的時候，難以避免有人會以相似三角形來證明中點定理和截線定理。

正因如此，2020 年出版的《課程闡釋》便把全等和相似兩部分分開，目的就是避免過早引入相似的概念，從而避免上述的循環論證。不過，這個安排是否真的能夠成功地避免上述的情況呢？

最新版教科書的編排

筆者查看了三套為新初中數學課程編寫的教科書，看看它們對「全等三角形」、「相似三角形」和「四邊形（其中涉及中點定理）」三課的安排，結果見下表：

教科書甲		教科書乙		教科書丙	
全等三角形	1B 冊第 10 課	全等三角形	2B 冊第 2 課	全等三角形	1B 冊第 12 課
相似三角形	2A 冊第 2 課	相似三角形	2B 冊第 3 課	相似三角形	2A 冊第 1 課
四邊形	3A 冊第 4 課	四邊形	3A 冊第 5 課	四邊形	3A 冊第 5 課

表 1

由上表可見，基本上，沒有一套教科書的安排能夠避免以相似三角形證明中點定理的循環論證錯誤！甚至有教科書把「全等」和「相似」安排成連續的兩課，那麼與放於同一學習單位的安排，有多大的分別？

另一原因

據說，把全等和相似分開成兩個學習單位的另一原因，與基本能力重點的重訂有關。

2006 年，當局引入全港性系統評估（Territory-wide System Assessment; TSA），隨之而來的，就是一個個的基本能力描述。在過去，亦有不少教育界人士對這個評估和能力描述作出了批評。筆者也發曾發表過要求當局修訂部分基本能力描述的文章（梁子傑（2011）。我看《數學課程第三學習階段基本能力》。《數學教育》32 期，29 – 41。）。而當時的其中一個建議，就是將原本寫成諸如：「展示對三角形的全等及相似條件的認識」的描述，分拆成「展示對三角形的全等條件的認識」及「展示對三角形的相似條件的認識」兩句。筆者當時的說法是：「無論從認知層面上、從教學層面上或者從數學層面上來看，全等三角形和相似三角形的本質並非相同，故此應該以不同的編碼來處理」。筆者當年提出這個建議，純粹是從評估的角度來考慮：如果我們從評估報告中，知道學生在「對三角形的全等及相似條件的認識」有所不足，那麼亦無從知道他不懂的，究竟是全等還是相似。由於全等和相似兩者本質上不同，因此在教導和輔導學生認識或從新認識這兩部分的內容時，方法是應該有分別的。筆者當時的想法是，為了方便教師更容易掌握學生的學習情況，應該把這兩個描述分開。不過，這並非代表筆者贊成把「全等」和「相似」分割成兩個學習單位來教授！

只知其缺點，而不知其優點

我明白，把「相似三角形」放在課程的較早位置，容易引起前面提及的「循環論證」危機。但勉強把「全等」和「相似」分開，又是否對教學有利呢？事實上，大家有沒有想過，當初 1999 年的《課程綱要》把「全等」和「相似」放在一起，或放於課程較早的位置，是基於怎樣的考量呢？

首先，相似三角形的判別條件 A.A.A. 正好用來補充全等三角形判別條件的討論。眾所周知，全等三角形首四個的判別條件為 S.A.S.、S.S.S.、A.S.A. 和 A.A.S.，而如果大家嘗試寫出 S 和 A 的各種組合，那麼必定知道上述條件中遺漏了 S.S.A. 和 A.A.A. 這個兩情況。S.S.A. 不是三角形全等的條件，只有它的特例 R.H.S. 才正確。而 A.A.A. 亦不會引至全等三角形，而是另一觀念相似三角形的判別條件。個人認為，只有把「全等」和「相似」放在一起，才可以將這個討論變得完整、圓滿。

其次，相似三角形以至相似圖形，是不少課題的討論基礎或工具。例如：比率和比例的概念、三角比（只要有一對相等的銳角，那麼兩個直角三角形便相似，它們對應的邊便成比例）、圓周率的概念（不同大小的圓都是相似圖形，因此周長與直徑的比率為常數）、計算平截頭體體積（當中涉及建立相似三角形和解方程的計算）等。如果將相似三角形的內容放在中點定理之後，那麼上述課題豈不是也要放在中點定理之後？可行嗎？尤其是三角比，可以放在中點定理之後嗎？難道要將中點定理放在中二？

由此可見，為何在新的《課程闡釋》下，教科書仍然把相似三角形放在中點定理之前，是可以理解的。但這個安排卻並沒有真正地解決循環論證的問題。

第三，雖然課程編排和評估是兩件互相牽連的事情，但這並不代表我們必須以相同的手法來處理它們。從上述的討論我們知道，從評估的角度來看，把全等和相似分開，有助我們對學生的能力有正確的理解。但從課程編排的角度來看，把全等和相似放在一起，的確可以引發良好的教學效果。那麼為何要把它們分開呢？

我的建議

請大家仔細地分析一下相似三角形的三個判別條件。A.A.A. 是至為重要的。它除了可以用來補充全等三角形的討論之外，它本身亦廣泛地、直

接或間接地應用於初中課程的每一角落。相反，「兩邊成比例且夾角相等」和「三邊成比例」這兩個條件，除了「相似三角形」這一課裡面的習題之外，我們甚少發現它們在其他課題中的應用！諷刺的是，在整個初中課程中，唯一找到應用「兩邊成比例且夾角相等」的地方，就是前面提及那個涉及循環論證的中點定理證明！（按：在高中，當證明三角形的外心、形心和垂心三點共線，與及證明向量積滿足分配律時，須用到「兩邊成比例且夾角相等」。）

因此，為了教學上有良好的效果，又為了避免所謂的循環論證，我建議把學習單位「相似三角形」分成兩部分：第一部分只談及一個判別三角形相似的條件 A.A.A.，並且應該與全等三角形放於同一學習單位之中；第二部分包括「兩邊成比例且夾角相等」和「三邊成比例」這兩個條件，並可安排這部分於中點定理之後才進行。由於第一部分是基礎的，因此這部分可安排於中一中講授。第二部分理論性較強，應用相對地較少，可考慮安排在中三，中點定理之後進行。同時，由於學生未曾接觸過「兩邊成比例且夾角相等」這判別條件，因此中點定理便可以按照傳統的方式，以全等三角形和平行四邊形的性質來證明，從而避免引起循環論證的危機。

「五行證明」的教學

在「我看《數學課程第三學習階段基本能力》」一文中，筆者也曾談及個人對「運用全等三角形進行證明」一句的見解。現希望藉一點篇幅，再闡述一下對這部分的意見。

在目前的教科書，以至是公開考試，我們不難發現，那些涉及全等三角形的題目往往都會分成兩部分：第一部分要求證明一對三角形全等，而第二部分則利用全等三角形的等邊或等角來繼續完成餘下的證明。個人認為，雖然從考試的角度來看，這個安排可以降低題目的難度，對考生來說，可以算是有益的，但是從教學的角度來看，這個安排卻把證明一對三角形全等這任務變成學習全等三角形的唯一目的，那麼學生根本就未能明白和欣賞，引入全等三角形的意義和正確的思考過程。

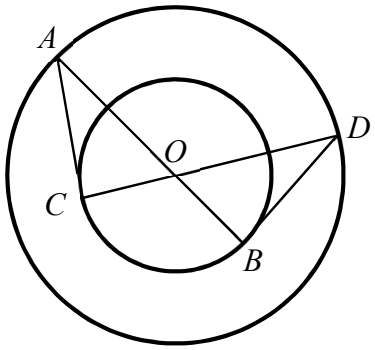

圖 1

圖 1 展示了兩個同心圓，圓心為 O。A、B、C 和 D 分別為兩圓上的點使得 AOB 和 COD 為直線。從觀察（或者直接用一個量角器去量度），我們不難發現，$\angle CAO = \angle BDO$。問題是，為甚麼呢？

認識全等三角形的朋友都會指出，因為圖中的 $\Delta AOC \cong \Delta DOB$，所以 $\angle CAO = \angle BDO$。再追問下去，大家或許會寫出以下的一個五行證明：

	$AO = DO$	（圓半徑）
	$\angle AOC = \angle DOB$	（對頂角）
	$OC = OB$	（圓半徑）
$\therefore$	$\Delta AOC \cong \Delta DOB$	（S.A.S.）
由此得	$\underline{\angle CAO = \angle BDO}$	（全等三角形對應角）（證完）

留意，在整個證明的過程當中，全等三角形並不是證明的目的（我們要證明圖中的 $\angle CAO$ 和 $\angle BDO$ 相等，才是我們的目的），而是一個過渡的角色。更重要的是，在整個思考的過程中，那一對全等三角形是我們從圖中自行找出來的，事前並沒有任何的指示說明我們要這樣做。

回到現時教科書或者是考試的做法。遇到上述情況，題目往往便會寫成以下的形式：

(a) 證明 $\Delta AOC \cong \Delta DOB$。

(b) 試解釋為何 $\angle CAO = \angle BDO$。

換言之，就是將原本的五行證明分成兩部分：(a) 有四行，(b) 再有一行。正如前面所說，這個做法可以降低題目的難度，但卻令學生以為，學習全等三角形，就是為了證明一對三角形全等（即完成 (a) 部）而已。頂多就是多行一步，得出一個推論。

可是，對教學而言，這個做法並不全面。要知道，證明三角形全等並不是證明的目的。我們至少應該在課程中引入一些在沒有任何提示三角形全等的情況下，寫出五行證明的練習，好讓他們建立運用全等三角形的完整思考過程。

當然，筆者明白，要求學生直接寫出五行證明有一定的難度。但請大家回看圖 1。圖 1 中明顯只有一對三角形，相信學生在證明 $\angle CAO = \angle BDO$ 的過程中，不難到看到這一點，亦明白必須利用圖中那對三角形來完成證明。事實上，五行證明和分成兩部分的練習唯一的分別，是學生必須自行找出和配對全等三角形的名稱。然而這一點，相信一般初學者都可以做到。因此，筆者認為書寫五行證明的要求並不過高，應該包括入全等三角形的學習重點之中，好讓學生對此課題有更深入、更全面和更合理的認識。

還有，在相似三角形的練習中，也應加入類似五行證明的題目。

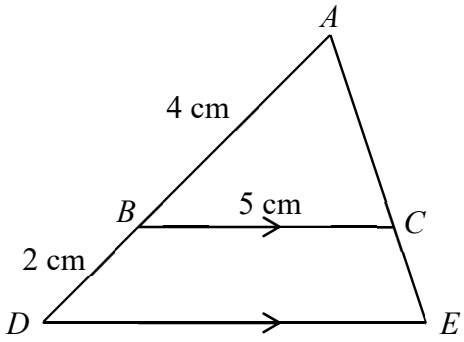

圖 2

圖 2 中，B 和 C 分別為 AD 和 AE 上的點，使得 $BC \parallel DE$。若 AB = 4 cm，BD = 2 cm 及 BC = 5 cm，求 DE。

從已知條件可見，若要求得 DE，則我們須利用一對相似三角形來建立計算。留意這個解題思路與前面提及的五行證明分別不大。

$$\begin{aligned}
&\angle DAE = \angle BAC && \text{（公共角）}\\
&\angle ADE = \angle ABC && \text{（同位角；}BC \parallel DE\text{）}\\
&\angle AED = \angle ACB && \text{（同位角；}BC \parallel DE\text{）}\\
\therefore\quad &\Delta ADE \sim \Delta ABC && \text{（A.A.A.）}\\
\text{由此得}\quad &\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} && \text{（相似三角形對應邊）}
\end{aligned}$$

$$\frac{DE}{5\text{ cm}} = \frac{4\text{ cm}+2\text{ cm}}{4\text{ cm}}$$

即 $$DE = \frac{6}{4}\times 5\text{ cm}$$

$$= \underline{7.5\text{ cm}}$$

基本上，上面計算的開首五步就是五行證明。這亦是筆者建議把「全等」和「相似」歸納入同一學習單位的原因（即兩者有相似的證明架構）。還有，相類似的相似三角形應用題在課程中亦比比皆是（例如：在前面提到關於平截頭體的體積計算），學生遲早都要自行寫出關於相似三角形的五行證明。

很可惜，據筆者觀察，近年已經越來越少教科書為學生提供這類一氣呵成的五行證明習題。相反，它們更將前面提到的 (a) 和 (b) 部分分開成兩個練習來看待。即是，有教科書先提供一個由一對已知全等的三角形寫出等邊或等角推論的練習，然後在另一個練習中，做一些只有四行證明的習題。有教科書更毋須學生寫出四行證明，只須寫出兩個三角形全等的判別條件簡寫便算完成了練習，不單沒有四行的架構，連配對三角形名稱這部分的工作，都由題目代勞。這做法無疑把一個原本是連貫的、有系統的數學思想方法變得支離破碎、毫無意義，更加喪失了原有題目的趣味性和挑戰性，確實與筆者所倡議的五行證明思想背道而馳，十分可惜。

最後補充

最後還有一點要補充。在 2020 年出版的《課程闡釋》中，「全等三角形」的學習單位亦同時包括等腰三角形和尺規作圖的討論。個人認為，「全等及相似」的重點是介紹全等和相似的判別條件，和教導學生如何書寫五行證明，與等腰三角形較注重計算和應用的主旨不同，故不宜放於同一學習單位中進行。一個理想的安排，是把它們分開，使各自的學習重點顯得更清晰，這才有利於教學。

作者電郵：jckleung@netvigator.com