

數學史與數學教學

李志堅

培基小學

姚泳楹

香海正覺蓮社佛教正慧小學

司徒寶美

大學講師

引言

數學是一門富有生命力的學科，將實物世界和思維世界聯繫，具有高度的抽象性、邏輯的嚴謹性、廣泛的應用性、優美性及文化性。作為數學教育工作者，除了教授學生數學原理、解題技巧外，若能在適切的課題上引入數學史，帶出數學中較人性方面的知識 (Fauvel, 1999)，就能將數學教育建立在磐石上。本文三位筆者，擷取及整理與數學課程相關的數學史並數學家資料，及設計相應的教學活動，希望藉此拋磚引玉，期待教師同工們能提出更多合適的教材，讓學生欣賞數學之美，並提升他們學習數學的興趣與效能。

數學史和數學教育

自 1972 年第二屆國際數學教育會議 (International Congress on Mathematical Education, ICME-2) 提出數學史和數學教育的相關議題後 (蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019)，數學史開始滲入數學教育中，2017 數學教育學習領域課程指引更在專題研習部分中提出「研習數學史或著名的數學問題和數學家的生平」(課程發展議會，2017)。而文件在價值觀和態度部分亦指出「欣賞數學的精確性、美感、和在文化方面的貢獻，以及數學在人類活動上所發揮的作用」，帶出數學中比較人民主義的面向。

因此本文作者先小試牛刀，利用時序呈現西方數學史的發展，透過擷取與數學課程指引中相關的數學史資料，與部分數學家及其資料，從而設計適合於小學及初中課程的增潤學習活動，讓教師們能裁剪合適部分以作課堂應用。

世界數學史

數學發展過程具有階段性，因此研究者根據一定的原則把世界數學史分成若干階段。目前學術界普遍將世界數學發展劃分為以下五個時期，分別為：1. 數學萌芽時期（公元前 600 年以前）；2. 初等數學時期（公元前 600 年 – 17 世紀中葉）；3. 變量數學時期（17 世紀中葉 – 19 世紀 20 年代）；4. 近代數學時期（19 世紀 20 年代 – 20 世紀初）；5. 現代數學時期（20 世紀初以來）。(夏恆，2012)。本文著墨於數學萌芽、初等數學及變量數學這三個時期。

一、數學萌芽時期（公元前 600 年以前）

1. 古巴比倫數學（Ancient Babylonian Mathematics）¹ **（時期：約 3500 BC – 539 BC）**

古巴比倫數學起源於現今土耳其境內的幼發拉底河（Euphrates）和底格里斯河（Tigris）流域，兩河流經現今的敘利亞和伊拉克，注入波斯灣。故任何「美索不達米亞」（Mesopotamia）（現伊拉克）人的數學統稱為古巴比倫數學。

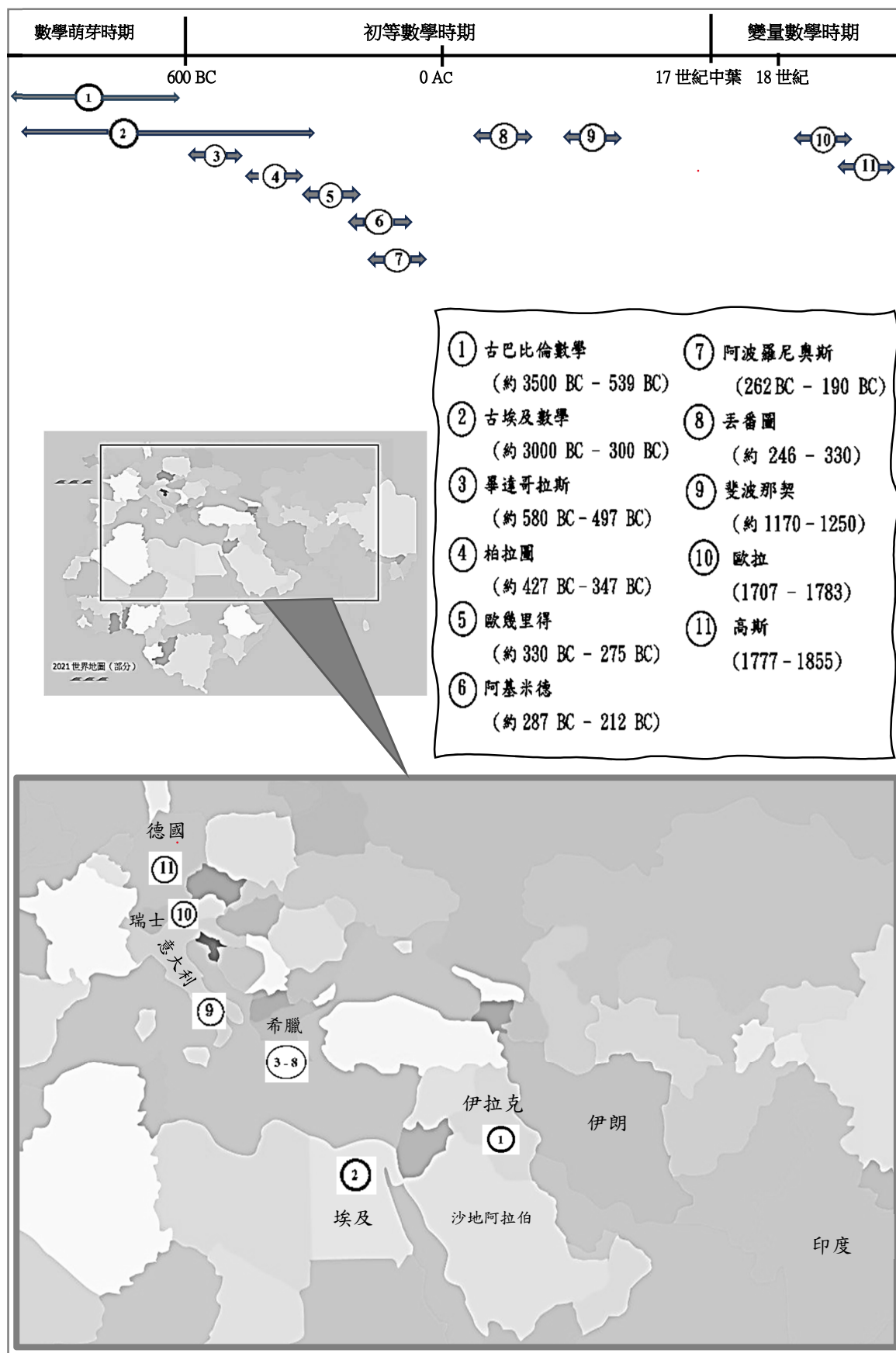
19 世紀初，考古學家於兩河流域挖掘出 50 萬多塊刻有楔形文字（cuneiform）的泥板書，這些泥板橫跨越巴比倫眾多歷史時期。其中有近 400 塊獲鑑定載有數字表和一批關於數學問題的純數學書板。現今對古巴比倫數學的認識，主要根據這些原始文獻。

1 參考資料：

- a. 劉勁生（1993）。古巴比倫數學概觀。《四川師範大學學報（自然科學版）》，（1），頁 80 – 87。
- b. 圖畫樹（2012）。古巴比倫的時間—數學的歷史（4）。《數學大世界：小學三四年級版》，（9），頁 2 – 3。
- c. 林革（2014）。古巴比倫人的數學智慧。《百科知識》，（11），頁 20 – 22。
- d. 英家銘（2020）。穿越四千年的數學遺產。《科學發展》，574 期（10/2020），頁 11 – 16。
- e. Zara, T. (2008). A Brief Study of Some Aspects of Babylonian Mathematics. (Unpublished master's thesis). Liberty University, Lynchburg, Virginia.

網上參考資料：

- f. Mac Tutor - Babylonian numerals
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_numerals/



巴比倫數字系統

古巴比倫人創造的一種楔形數字是六十進位值制的數系，每一個位都是 60 的乘冪，因此他們在每一位上面需要 59 種不同的符號，巴比倫數字系統沒有表示「零」的符號（需要「零」的時候用空位表示）。圖 1 是古巴比倫採用六十進制由兩個符號（ Υ 表示一， $\triangleleft$ 表示十）構成 1–59 的 59 個數字²：

	10 $\triangleleft$	20 $\triangleleft\triangleleft$	30 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft$	40 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft$	50 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft$
1 Υ	11 $\triangleleft\Upsilon$	21 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon$	31 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon$	41 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon$	51 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon$
2 $\Upsilon\Upsilon$	12 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon$	22 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon$	32 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon$	42 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon$	52 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon$
3 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	13 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	23 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	33 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	43 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	53 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
4 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	14 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	24 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	34 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	44 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	54 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
5 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	15 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	25 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	35 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	45 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	55 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
6 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	16 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	26 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	36 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	46 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	56 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
7 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	17 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	27 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	37 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	47 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	57 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
8 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	18 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	28 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	38 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	48 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	58 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$
9 $\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	19 $\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	29 $\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	39 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	49 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	59 $\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$

圖 1 古巴比倫數字 1–59

以下是一些巴比倫數字的例子：

楔形數字	翻譯
$\Upsilon\triangleleft\Upsilon\Upsilon$	1, 15 代表 $1 \times 60^1 + 15 = 75$
$\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon\triangleleft\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	16, 43 代表 $16 \times 60^1 + 43 = 1003$
$\triangleleft\Upsilon\Upsilon\triangleleft\triangleleft\Upsilon\Upsilon\triangleleft$	44, 26, 40 代表 $44 \times 60^2 + 26 \times 60^1 + 40 = 160000$
$\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon\Upsilon$	6, 0, 9 代表 $6 \times 60^2 + 0 \times 60^1 + 9 = 21609$

古巴比倫六十進制的影響

由古巴比倫人創造的六十進制在數學歷史上留下了不可磨滅的痕跡，這部分應該值得討論的。

我們今天計算時間，將一小時劃分成六十分鐘（minute），一分鐘分成六十秒（second），還有將一個圓周劃分成 360 度（degree），再將一度切成六十

2 參考資料：

英家銘（2020）。穿越四千年的數學遺產。《科學發展》，574 期（10/2020），頁 13。

分，一分再切成六十秒以表示細微的角度，都是來自巴比倫的六十進位的計數系統。

除了角度和時間，六十進位在不少領域中都有應用。那為什麼六十進制能廣泛應用呢？從數學的角度來看，10 只有 1, 2, 5, 10 為公因數；60 則有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 為公因數，故六十進制比十進制更容易避開均分時出現小數的問題。這也是為什麼我們選用六十進位。

教學活動

介紹古巴比倫數字系統。

延伸：為什麼時間使用六十進制？³

對於有興趣的同學，教師可以表示計算時間主要採用的六十進位就是來自巴比倫。舉個例子：我們把 76 分鐘寫成 1 小時 16 分鐘，這和巴比倫人把 76 表示成 (1, 16) 是一樣的。教師亦可鼓勵學生就上述問題進行探究，從而提升他們課後自主學習的動機。

2. 古埃及數學 (Ancient Egyptian Mathematics) ⁴ **(時期：約 3000 BC – 300 BC)**

古埃及是世界文明古國之一，位於尼羅河兩岸。古埃及數學泛指古埃及人發明和使用的數學。

古埃及數字系統

公元前 3000 多年時，古埃及人所發明的數字系統，使用象形文字（圖 2），其數字以十進位表示，但並非位值制，所以會給記數帶來了麻煩。

3 網上參考資料：

每日頭條 — 為什麼時間使用 60 進制？

<https://kknews.cc/history/gj4bba9.html>

4 參考資料：

a. 令狐若明 (2004)。古埃及人的數學成就。《史學集刊》4 期，頁 49 – 52。

b. 柳笛、邢巧芳 (2009)。古埃及單分數。《湖南教育 (下旬刊)》，2 期，頁 56 – 57。

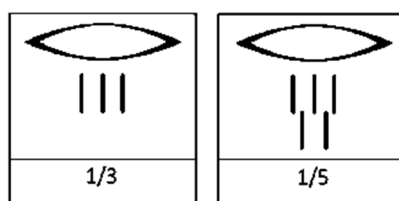
c. 古林 (2013)。埃及分數。《中學生數理化 (初中版) (中考版)》，Z2，頁 42 – 43。

d. 王南 (2018)。象形數字。《小學生學習指導》，30 期，頁 28。

1	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
						

圖 2 古埃及象形數字 (Hieroglyphic Numbers) ⁵

除了表示數字以外，古埃及人還會使用精確的方法表示分數，他們將真分數都化成單位分數 (unit fractions) (大於 0 而分子為 1 的分數) (圖 3) 之和，例： $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (用現代的表示方式)。而這種表達方式亦有其實際用途 (實用、比較大小等)。

圖 3 古埃及象形分數 (Hieroglyphic Fractions) ⁶

由古埃及數系建立起來的算術具有加法特徵，其乘、除法的計算也只是利用連續加倍的方法來完成。

目前我們對古埃及數學的認識與研究，主要根據兩卷由僧侶文所寫成的紙草書，其中一份是成書於公元前 1850 年左右的《莫斯科紙草》(The Moscow Papyrus)，另一份是約成書於公元前 1700 年的《萊茵德紙草》(The Rhind Papyrus)，二者內容都似乎是數學教科書。《莫斯科紙草》包含有趣的應用題；《萊茵德紙草》的內容則相當豐富，講述了埃及的乘法和除法、單位分數的用法、試位法、求圓面積問題的解和數學在許多實際問題中的應用。

教學活動 (一)

猜算以下圖形的數值，之後教師出題，學生運用古埃及象形數字表達相應數值，從而帶出位值的重要性及便利。

5 參考自網頁：Wikimedia Commons - Hieroglyphs of Egypt: Numerals

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Hieroglyphs_of_Egypt:_Numerals?uselang=zh-tw

6 參考自網頁：Wikimedia Commons - Hieroglyphs of Egypt: Fractions

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Hieroglyphs_of_Egypt:_Fractions?uselang=zh-tw

		
3242	21237	1333330

教學活動 (二)：分餅遊戲

教師提問：如何將 7 個蛋糕平均分給 8 個人？最直接的方法為把每 1 個蛋糕分作 8 等份，每人共取去 7 等份，整個過程共需 28 次切割。

如果運用單位分數表達 $\frac{7}{8}$ ，則 $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ，分蛋糕的過程便較為便利。首先每人取去半個蛋糕，再取去四份之一個蛋糕，最後取去八份之一個蛋糕，整個過程只需要 12 次切割。

教學活動 (三)

運用單位分數，比較異分母分數大小。

例： $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{6}{7}$

把真分數化成相異單位分數之和：

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad \text{及} \quad \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$$

故 $\frac{6}{7}$ 比 $\frac{5}{6}$ 大。

備註⁷：如何把真分數化成相異單位分數之和？

可運用英國數學家西爾維斯特 (J.J. Sylvester, 1814-1897) 提供以下的系統構作法：

1. 求不大於給定分數的最大的單位分數
2. 從給定分數中減去此單位分數
3. 求不大於所得差的最大單位分數
4. 繼續減，並且繼續此程序

這個方法就是在 $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots - \frac{1}{n} \dots$ 中，逐步拿最大的剩下來的單位分數去併和，直至與給定分數相等。

例如： $\frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$ （因 $\frac{1}{2}$ 是不大於 $\frac{6}{7}$ 的最大單位分數）

7 馮振業 (1998)。單位分數的奧秘。《數學教育》，第七期 (12/98)。香港數學教育學會。

$$\frac{5}{14} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42} \quad \left(\text{因 } \frac{1}{3} \text{ 是不大於 } \frac{5}{14} \text{ 的最大單位分數} \right)$$

$$\text{因此 } \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}。$$

二、初等數學時期（公元前 600 年 – 17 世紀中葉）

3. 畢達哥拉斯（Pythagoras）⁸ （時期：約 580 BC – 497 BC）

畢達哥拉斯是一位古希臘的數學家兼哲學家。他於意大利的克羅頓（Kroton）創建了結合政治、宗教及學術的私密社團（畢達哥斯拉學派 Pythagoreanism）。該學派信奉「萬物皆數」（All is number），他們相信世界上一切事物均可以用數字作解釋，並且對數字癡迷到近乎崇拜。三角形數

8 參考資料：

- a. 胡作玄（1997）。從畢達哥拉斯到費爾馬（第 1 版），鄭州市：河南科學技術出版社。
- b. 6 吉祥完滿的數（2011）。《數學大世界（高中）》，08，頁 7。
- c. 被人們崇拜的數（2011）。《數學大世界（高中）》，03，頁 17。
- d. 周昌壽（1937）。物理學名人傳上。商務印書館。
- e. 東春（2011）。畢達哥拉斯學派。《數學大世界（小學三四年級適用）》，05，頁 22。
- f. 郭美芳（2011）。歷史上的三次數學危機。《數學大世界（小學三四年級適用）》，Z2，頁 40 – 41。
- g. 邵逸楠（2013）。美妙絕倫的完全數。《數學大世界（小學五六年級適用）》，Z2，頁 32 – 33。
- h. 王波（2011）。注重導入藝術 提升數學課堂實效。《數學大世界（教師適用）》，06，頁 31。
- i. 張艷敏（2008）。古希臘理性數學的開始。《科教文匯（中旬刊）》，02，頁 73。
- j. 蔡天新（2008）。畢達哥拉斯之謎。《數學通報》，06，頁 1 – 7, 10。
- k. 金紅蓮（2009）。畢達哥拉斯與其學派思想。《科教文匯（中旬刊）》，08，頁 244, 273。
- l. 柯利弗德·皮寇費（2013）。《數學之書》，頁 27，ISBN 978-957-13-5699-0。
- m. 笹部貞市郎（2012）。《學校這樣教數學就好了！（下）》，頁 20 – 28，ISBN 978-986-6037-48-1。

網上參考資料：

- n. 畢達哥拉斯_百度百科
<https://baike.baidu.hk/item/%E7%95%A2%E9%81%94%E5%93%A5%E6%8B%89%E6%96%AF/328218>
- o. 畢達哥拉斯的數字崇拜
<https://www.thenewslens.com/article/143789>

(triangular numbers)、正方形數(square numbers)、完全數(perfect numbers)等都是他們所鍾愛的。該學派甚至認為數字本身附有神秘含義，他們認為宇宙是由首四個偶數及奇數之和所組成，即 $2+4+6+8+1+3+5+7=36$ ，故稱數字 36 為 Tetraktys (十的完美理論)，最神聖的數字。不過，此學派對數的概念的認識只限制在「有理數」的範圍。也就是說，那時候的所謂數僅指整數及兩個整數之比。

畢達哥拉斯學派最著名的發現為「畢氏定理」，即直角三角形兩條直角邊平方和等於斜邊平方。雖然畢達哥拉斯不是最早發現這定理的，但他證明了定理的普遍性。可是，從這個定理中，竟然發現了一件不可思議的事，就是腰長為 1 的等腰直角三角形的斜邊長度是一個奇怪的數 $\sqrt{2}$ ，它不能用整數或兩個整數之比表示，此抵觸了畢達哥拉斯學派的根本信條。因此，在當時是一個極大的震撼，而引來「第一次數學危機」—「無理數」的發現，即有理數以外的實數，如無限不循環小數。

教學活動：教授奇妙的完全數 (Perfect Numbers)⁹

公元前 6 世紀的古希臘數學家和哲學家畢達哥拉斯是最早探究完全數(perfect numbers)的人。如果一個正整數恰好等於它的所有真因子(即除了自身以外的因數)的總和，則稱該數為完全數。他已經知道 6 (它有真因子 1、2、3，其所有真因子相加， $1+2+3=6$ ，恰好等於自身)和 28 (它有真因子 1、2、4、7、14，其所有真因子相加， $1+2+4+7+14=28$ ，也恰好等於自身)是完全數。他曾說：「6 象徵著圓滿的婚姻以及健康和美麗，因為它的部分是完整的，並且其和等於自身。」完全數誕生後，一直吸引著眾多的數學家和業餘愛好者對它進行探究，他們沒完沒了地找尋這一類數字。截至 2018 年，相關研究者已經找到 51 個完全數，第一個完全數是 6，第二個完全數是 28，第三個完全數是 496，後面的完全數還有 8128、33550336、8589869056 等等。

教師首先介紹完全數及它的歷史發展。接著，教師以古氏積木演示第一個完全數 6 (圖 4)，從而引導學生找尋 100 以內完全數(即 6 和 28)。令學生能透過完全數去認識數學的美及其文化。

9 參考自網頁：完全數 - 百度百科

<https://baike.baidu.hk/item/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%95%B8/370913>

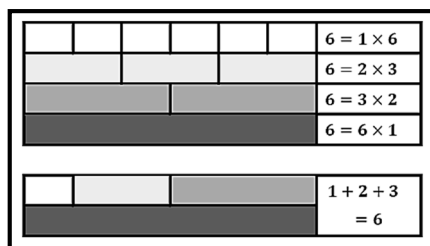


圖 4 以古氏積木演示完全數 6

4. 柏拉圖 (Plato)¹⁰ (時期：約 427 BC – 347 BC)

柏拉圖是古希臘哲學家，師承蘇格拉底。他為了研究幾何，與多位畢達哥斯拉學派的數學家保持緊密聯繫，並在公元 4 世紀時於雅典創辦了世界數學的中心－「柏拉圖學園」(Plato Academy)。柏拉圖主張通過學習幾何從而培養邏輯思維能力，其學園門口更寫著：『不懂幾何者不得入內』(Let no one ignorant of geometry enter here)。

柏拉圖非常重視對立體幾何的研究，而且他發現有五種正多面體：正四面體、正六面體（正立方體）、正八面體、正十二面體、正二十面體。而後人亦因此將以上五種正多面體稱為「柏拉圖多面體」(Platonic Solid)。

此外，柏拉圖在《理想國》第六卷中論及數學假設和證明，他說¹¹：

你們知道幾何、算術和有關科學的學生，在他們的各科分支裡，假定奇數和偶數、圖形以及三種類型的角等等是已知的；這些是他們的假設，是大家認為他們以及所有人都知道的事，因而認為是毋須向他們自己或向別人再作任何交代的；但他們是從這些事實出發的，並以前後一貫的方式往下推，直至出結論。

在柏拉圖思想的影响下，柏拉圖學派在數學中引入了分析法和歸謬法，給出了點、線、面及體的定義。

¹⁰ 參考資料：

- a. 笹部貞市郎 (2012)。《學校這樣教數學就好了！(下)》，頁 29 – 33，ISBN 978-986-6037-48-1。
- b. 孟廣武 (2016)。古希臘數學的起源。《聊城大學學報：自然科學版》，29(2)，頁 1 – 18。

¹¹ 李文林 (2002)。數學史概論 (第 2 版)。高等教育出版社，頁 44。

教學活動 (一)

學生在認識頂、棱與面時，可從點、線、面作觀察，發現立體圖形的特性，如：對稱。亦可透過影片作進一步了解：

<https://www.youtube.com/watch?v=okfqTH6MOUU>

教學活動 (二)

探究正多面體展開圖。教師引導學生找出方法，不必靠實際剪出展開圖，就能判斷某個平面圖是否為某正多面體（例如正四面體、正六面體或正八面體）的正確展開圖。

有關「探究正多面體展開圖」的例子，可參閱：

柏拉圖的天空 — 正多面體展開圖之研究

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/elementary/0804/080402.pdf>

5. 歐幾里得 (Euclid) ¹²

(時期：330 BC – 275 BC)

古希臘數學家，被稱為「幾何學之父」。他出身於柏拉圖學派，從學派中取得眾多材料並蒐集的許多定理。此外，他更將前人的鬆散演證嚴謹化，而編成了數學巨著《幾何原本》(Elements) (可以參看由 David E. Joyce, Department of Mathematics and Computer Science, Clark University 提供 Euclid's Elements 的網上版 <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>)，它塑造的公理化邏輯體系，為數學的發展作出巨大貢獻。

《幾何原本》共十三卷，涵蓋了平面幾何、立體幾何、比例及數論等領域，幾世紀以來都納入世界各地大學的必備課程。當中，包括著名的歐幾里得算法 (Euclidean algorithm)，又稱「輾轉相除法」，是用來求兩個非負整數的最大公因數 (H.C.F.) 的方法。輾轉相除法首次出現於歐幾里得的《幾何原本》(第 VII 卷，命題 i 和 ii) 中。數學史學者希斯 (Thomas Heath) 稱《幾何原本》為「史上最偉大的數學教科書」；女詩人聖文森米萊 (Edna St.

12 參考資料：

- a. 柯利弗德·皮寇費 (2013)。《數學之書》，頁 33，ISBN 978-957-13-5699-0。
- b. 林壽福、鄭勝鴻 (2007)。歐幾里得及其輾轉相除法。《HPM 通訊》，第十卷第十一期第一版，頁 1 – 6。

Vincent Millay) 曾寫下：「只有歐幾里得看得見最純粹的美 (Euclid alone has looked on Beauty bare)。」

教學活動 (一)：加強價值觀教育

在普羅克洛斯 (Proclus) (約 410–485) 的《幾何學發展概要》通常稱為《普羅克洛斯概要》 (Proclus's summary) 中，就記載著這樣一則故事¹³：

歐幾里得曾給托勒密王 (Ptolemy) 講授幾何學。這位國王雖然愛好學習，但又不肯下工夫，他問歐幾里得說，除了《幾何原本》之外，還有沒有其他學習幾何的捷徑。歐幾里得就用『幾何無王者之道！』〔There is no royal road to geometry〕的話回答，意思是：『在幾何裡，沒有專為國王鋪設的路。』這話後來推廣為『求知無坦途』，成為傳誦千古的學習箴言。

從而勉勵同學，就如同歐幾里得上面的回答，足見為學無捷徑，必須下苦功，方能培養好數學能力，可望獲取卓越成績。

教學活動 (二)

引入輾轉相除法求最大公因數。

參閱葉嘉慧、馮振業，《最大公因數和最小公倍數：以線段表示開創教學空間》：http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/17/307.pdf

6. 阿基米德 (Archimedes)¹⁴ **(時期：約 287 BC – 212 BC)**

¹³ 參考自網頁

<http://home.chkpcc.net/~mathsoc/1.htm>

¹⁴ 參考資料：

- a. 李維兵 (2013)。古代力學之父阿基米德。《中學物理》，01，頁 82-84。
- b. 華興桓 (2010)。數學之神阿基米德。《數學大世界》，12，頁 2。
- c. 孟廣武 (2016)。古希臘數學的起源。《聊城大學學報：自然科學版》29(2)，頁 1–18。
- d. 鄒生賢 (2015)。阿基米德揭開王冠的秘密。《語文世界》，Z1，頁 86。
- e. 王家傳 (2007)。古希臘人的數學智慧 (二)。《中學生數學》，17，頁 8–9。
- f. 趙志勤 (2005)。數學之神 — 阿基米德。《中學生數學》，05，頁 25。
- g. 王渝生 (2008)。尤里卡！— 浮力定律的發現。《科技導報》，02，頁 98。

阿基米德是世界三大著名數學家之一（其餘兩位分別為牛頓和高斯），還是傑出的物理及天文學家。阿基米德深受歐幾里得的《幾何原本》所影響，奠定了日後從事科學研究的基礎。他在數學史上的最大貢獻是對幾何的研究，發展了「窮竭法」（method of exhaustion）（也叫逼近法）來求面積和體積，例如求圓球的表面積和體積。

在阿基米德的數學著作《圓的量度》（Measurement of a circle）中，他運用了圓內接和圓外切正多邊形的周長來計算圓周率 π 的方法，圓周率就是圓周對其直徑之比。他發現多邊形的邊數愈多，便能愈精準得出圓周率。他先由正六邊形開始，逐次加倍計算到正 96 邊形，求得圓周率的值介於 $\frac{223}{71}$ 及 $\frac{22}{7}$ 之間（圖 5）。此外，他的研究方法亦是日後微積分的起源。

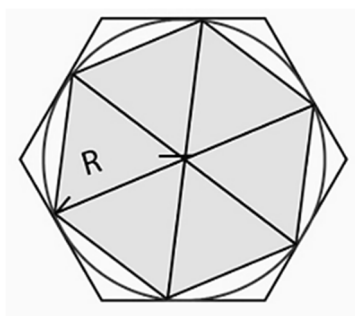


圖 5 先由正六邊形開始，讓邊數逐次加倍而求得更精確的圓周率 π ¹⁵

另外，阿基米德在其著作《浮體論》（On Floating Bodies）中，提出物體在流體中所受的浮力等於物體所排開的流體的重量。傳說國王希羅懷疑工匠

-
- h. 巫亞珍（2013）。阿基米德和浮力定律的發現。《中學生數理化（八年級物理）》，04，頁 35。
 - i. 司志本（2009）。關於圓周率的一些常識。《中學生數學》，23，頁 29。
 - j. 董蕊（2008）。圓周率 π 的自述。《科技資訊(科學教研)》，21，頁 562。
 - k. 吳維煊（2014）。圓周率計算與研究過程中的數學文化特徵。《廣東第二師範學院學報》，03，頁 86 – 92。
 - l. 範文禮（2013）。 π 值的計算歷史發展時期。《學週刊》，22，頁 206 – 207。
 - m. 笹部貞市郎（2012）。《學校這樣教數學就好了！（下）》，頁 34 – 38，ISBN 978-986-6037-48-1。

15 參考資料：

- 陳琬婷，黃耿祥，楊智惠（2012）。阿基米德的傳奇。《科學發展》，469 期（1/2012），頁 44。

在其黃金皇冠摻了銀，於是便請阿基米德鑒定皇冠是不是純金，但又命令阿基米德不能破壞皇冠。在洗澡時，阿基米德想到不同材料的物品有不同的重量，可以利用排水法計算體積。因此，阿基米德繼續認真研究、做實驗和分析，發現了浮力定律，即物體在水中所受的浮力大小等於排開的水所受的重力，並幫助了國王希羅斷定其皇冠摻雜不同物質。

教學活動 (一)

教師教授圓周率 π 時，可介紹阿基米德的「窮竭法」，如何精準得出圓周率 π 的值介於 $\frac{223}{71}$ 及 $\frac{22}{7}$ 之間，藉此認識 π 的由來和演變。亦可透過影片作進一步了解：<https://www.youtube.com/watch?v=Yr2VK9NowHs>

教學活動 (二)

教師教授以排水法求不規則體積時，可加入阿基米德的求皇冠體積的故事，加深學生對該數學家的認識，亦可觀賞以下影片：

<https://www.youtube.com/watch?v=kK4WS6Qm2JU>

7. 阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga)¹⁶ **(時期：約 262 BC – 190 BC)**

又譯為阿波羅尼，古希臘數學家，天文學家，其最大貢獻是研究圓錐曲線（亦稱圓錐截線，簡稱錐線），是由一平面截二次錐面而得到的曲線。在其著作《圓錐曲線論》(Conics) 中，引入了我們如今使用的三個術語：「拋物線」(英語：parabola，即齊曲線)、「橢圓」(英語：ellipse，即虧曲線，圓為橢圓的特例)和「雙曲線」(英語：hyperbola，即超曲線)。

教學活動

學生搜集生活中的拋物線（例：籃球射球軌跡）、橢圓（例：鏡子）及雙曲線（例：漏斗）圖片，張貼於數學筆記或利用 padlet 展示。

16 參考資料：

- a. 笹部貞市郎 (2012)。《學校這樣教數學就好了！(下)》，頁 29 – 33，ISBN 978-986-6037-48-1。

網上參考資料：

- b. Apollonius of Perga - New World Encyclopedia
https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Apollonius_of_Perga

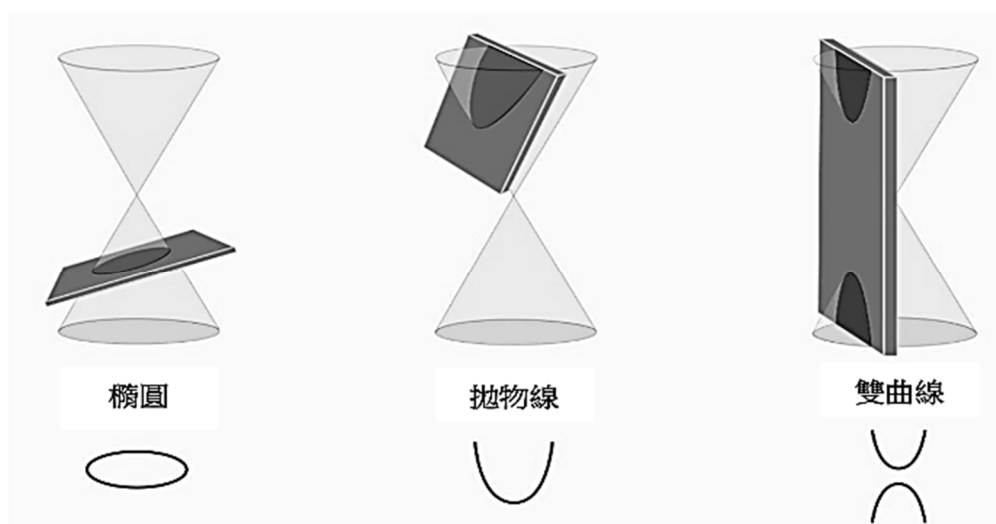


圖 6 圓錐曲線的幾何意義

8. 丟番圖 (Diophantus of Alexandria)¹⁷ (時期：約 246 – 330)

古希臘數學家，對算術理論有深入研究，完全脫離了幾何形式。他認為代數方法比幾何的演繹陳述更適宜於解決問題，而在解題的過程中顯示出高度的巧思和獨創性，因此被後人稱為『代數學之父』。

丟番圖最著名的著作是《算術》(Arithmetica)，當中探討求解代數方程組的問題，影響後世深遠。皮埃爾·德·費馬 (Pierre de Fermat) 就是在閱讀《算術》時，嘗試常規化其中的問題而引發了困擾數學界近 300 年的「費馬最後定理」(亦稱費馬大定理，Fermat's Last Theorem)。

教學活動

數學謎題的「丟番圖墓志銘」¹⁸：

人們用了一條代數題簡單概括了丟番圖一生的經歷，並把這道數學題刻在了他的墓碑上。

17 參考資料：

- 李凌，曉葉 (1981)。《奇怪的墓碑：數學故事 (第 1 版)》，濟南：山東人民出版社。
- 楊寶山 (2004)。丟番圖的《算術》。《自然辯證法通訊》04 期，頁 74 – 78。

18 參考自網頁：

丟番圖_百度百科

<https://baike.baidu.hk/item/%E4%B8%9F%E7%95%AA%E5%9C%96/7721138>

「上帝給予的童年佔六分之一，
 又過十二分之一，兩頰長鬍，
 再過七分之一，點燃起結婚的蠟燭。
 五年之後天賜貴子，
 可憐遲到的寧馨兒，享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓。
 悲傷只有用數論的研究去彌補，
 又過四年，他也走完了人生的旅途。」

這相當於解一元一次方程式

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

因此答案是 $x = 84$ ，故丟番圖享壽 84 歲，於 33 歲時成婚，38 歲時生子，兒子活到 42 歲。

1. 學生根據墓志銘，計算丟番圖的壽命，並參考墓志銘，創作學生個人版本（例：小六學生約為 12 歲，小明用了二份之一的時間在小學，如此類推）；或
2. 教師先提供丟番圖的壽命為 84，學生計算其不同人生階段時的歲數。

9. 斐波那契 (Leonardo Fibonacci)¹⁹ (時期：約 1170 – 1250)

原名 Leonardo of Pisa，意大利商人兼數學家，在數學方面的主要貢獻為其名作《計算書》(Liber Abaci) (又譯為《算盤書》(Book of the Abacus))，並將阿拉伯數字記數系統引進歐洲，及研究出斐波那契數列 (或稱費氏數列) (Fibonacci sequence)。

19 參考資料：

- a. 吳振奎 (1993)。《斐波那契數列 (世界數學名題欣賞叢書)》。臺北：九章出版社。
- b. 康士凱 (1992)。《斐波那契數列 (第 1 版)》。上海：上海科技教育出版社。
- c. 笹部貞市郎 (2012)。《學校這樣教數學就好了！(下)》，頁 116 – 119，ISBN 978-986-6037-48-1。
- d. 柯利弗德·皮寇費 (2013)。《數學之書》，頁 55，ISBN 978-957-13-5699-0。

網上參考資料：

- e. 斐波那契回調 — 維基百科

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E5%9B%9E%E8%B0%83>

教學活動

在《計算書》(Liber Abaci) 中提出了一個著名及有趣的兔子問題：

「如果一對兔子每月能生一對小兔（一雄一雌），而每對小兔在牠出生後的第三個月裡，又能開始生一對小兔，假定在不發生死亡的情況下，由一對出生的小兔開始，一年後會有多少對兔子？」

根據題意，讓我們來算一下：

第一個月：只有一對幼兔；

第二個月：這對幼兔長為成兔還不會生殖，仍只有一對兔子；

第三個月：第一對成兔生下幼兔，這時有兩對兔子；

第四個月：第一對成兔再生下幼兔，上個月的幼兔長為成兔，這時總共有三對兔子 ……

活動一

以 F_n 表示在第 n 個月擁有兔子的總對數。請同學完成下表，列出每個月兔子在數量上的變化：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n													

則 $F_1=1$ ， $F_2=1$ ， $F_3=2$ ， $F_4=3$ ， $F_5=5$ ， $F_6=8$ ， $F_7=13$ ， $F_8=21$ ， $\dots$ ，即 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ 。由此我們可以得到一個數列並稱之為斐波那契數列（或稱費氏數列）(Fibonacci sequence)。

增潤活動二

請同學觀察一下斐波那契數列，各項之間有何關聯性？

此數列，由初值 $F_1 = F_2 = 1$ 及遞推關係 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ， $n \geq 3$ ，給出序列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ 。

三、變量數學時期（17 世紀中葉 – 19 世紀 20 年代）

10. 歐拉（Leonhard Euler）²⁰ （時期：1707 – 1783）

瑞士數學家，十三歲就讀巴塞爾大學，師承當代數學大師約翰·伯努利（Johann Bernoulli）（註：約翰·伯努利為微積分之父萊布尼茲的徒弟），十九歲開始發表論文，其恩師約翰·伯努利曾讚揚歐拉：「我介紹高等分析的時候，它還是個孩子，而現在你正在將它帶大成人」，由此可見歐拉對數學的貢獻。

歐拉涉獵數學各領域，從數論到分析，無論抽象或應用，是數學史上最偉大的數學家之一，也是最多產的數學家。歐拉一生共發表 856 篇論文，32 部著作，而其畢生半數論文及著作，均是在其雙眼失明後完成的。

歐拉在當時的俄羅斯帝國生活了 30 多年，創立沙俄第一個數學學派 — 歐拉學派，親手將一大批俄國青年引進了輝煌的數學殿堂。俄羅斯人至今仍深深地感激歐拉美好的情誼，在許多俄文書籍裡，都親切地稱歐拉是「偉大的俄羅斯數學家」。

20 參考資料：

- a. 邱承雍（2010）。歐拉線定理及其證明。《數學大世界（初中生適用）》（Z2），頁 2。
- b. 李鵬奇（2001）。18 世紀數學的中心人物—歐拉。《自然辯證法通訊》（03），頁 69 – 79。
- c. 姚少魁、張浩（2021）。萊布尼茲還是歐拉？— 談函數概念的歷史發展。《數學教學》（03），頁 10 – 17。
- d. 鄭英元（2007）。紀念歐拉誕生 300 周年。《數學教學》（08），頁 49。
- e. 陳明、李希峰（2010）。透過數學家看圖論的學科發展。《透過數學家看圖論的學科發展》（02），頁 67 – 68。
- f. 柯利弗德·皮寇費（2013）。《數學之書》，頁 92，ISBN 978-957-13-5699-0。
- g. 笹部貞市郎（2012）。《學校這樣教數學就好了！（下）》，頁 89 – 94，ISBN 978-986-6037-48-1。

網上參考資料：

- h. 歐拉：善良的偉人
<https://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/pdf/Euler.pdf>
- i. 歐拉關於七橋問題的解—從數學史與數學教育的角度看
https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d364/36404.pdf

歐拉在 1736 年的一篇論文中，解答了「柯尼斯堡七橋問題」，並證明了更為廣泛的有關一筆畫的三條結論，而數學中的拓撲學（Topology）和圖論（Graph Theory）都以它作為起端。歐拉於數學領域貢獻良多，數獨（Sudoku）亦起源於其拉丁方（Latin Square Design）。

教學活動

討論「柯尼斯堡七橋問題」及其簡單的解決思路，延伸為一筆劃問題。參考短片：https://www.youtube.com/watch?v=L3_L4pweAMY

11. 高斯（Johann Friedrich Carl Gauss）²¹ **（時期：1777 – 1855）**

德國數學家，物理學家和天文學家。他與阿基米德和牛頓並列為歷史上最偉大的數學家。高斯不斷精益求精及力求實效完美，建立了卓越的算術能力。一生發表近 150 篇論文，解答及證明了數學上不少定理，包括：正十七邊形尺規作圖之理論與方法、誤差計算、質數分佈定理、最小二乘方法則、曲面論、擾動理論等，對數學貢獻深遠。

高斯九歲時，班上老師要求學生用最短時間計算自然數 1 至 100 之和。高斯利用算術的對稱性，找到當中有 50 對 101 的數列之和（ $1 + 100 = 101$ ， $2 + 99 = 101$ ， $9 + 98 = 101$ ，……），從而得出 $50 \times 101 = 5050$ 。

高斯在同餘研究上有一定成就，同餘符號（ $\equiv$ ）也是由他採用。有兩個整數

21 參考資料：

- a. 金亞南、徐瀝泉（2015）。高斯數論研究芻議及其生平補遺 — 紀念高斯逝世 160 周年。《自然雜誌》（05），頁 348 – 354。
- b. 佚名（2013）。高斯：“我一生的效勞都服從於您的規律”。《學習博覽》（10），頁 20 – 21。
- c. 郭有成、何仕、劉寶良（2003）。限制高斯投影引起水平面積計算誤差的方法。《礦山測量》（04），頁 41 – 42。
- d. 劉宇輝（2016）。一般曲面論成因探析。《自然辯證法研究》（12），頁 85 – 89。
- e. 星雲（2016）。數學王子高斯。《初中生之友》（09），頁 63 – 64。
- f. 馮承天（2013）。同餘關係和整除法則。《上海中學數學》（03），頁 23 – 25。
- g. 柯利弗德·皮寇費（2013）。《數學之書》，頁 108，ISBN 978-957-13-5699-0。
- h. 笹部貞市郎（2012）。《學校這樣教數學就好了！（下）》，頁 95 – 101，ISBN 978-986-6037-48-1。

x 、 y 除以正整數 k 所得的餘數相等，則 x 及 y 為模 k 同餘，以高斯符號記作： $x \equiv y \pmod{k}$ ，讀作 x 與 y 為模 k 同餘。例如： $12 \equiv 72 \pmod{5}$ 。

註：若 $a \equiv b \pmod{k}$ ，即 $a - b = nk$ ， n 為整數。

教學活動 (一)

首先分享高斯九歲時的故事，然後引導學生找出到底高斯用了甚麼快捷方法計算自然數 1 至 100 的和，最後再計算其他連加的題目。

教學活動 (二)

同餘 (congruence modulo) 可應用在解決生活上的問題，如日曆、時刻等。

例子：2020 東京奧運的閉幕日子為香港時間 2021 年 8 月 8 日（星期日），2024 巴黎奧運的閉幕日子為 2024 年 8 月 11 日，即星期幾？

解：只要求從 2020 年東京奧運到 2024 年巴黎奧運閉幕日的總日數被 7 除的餘數就行了。東京奧運與巴黎奧運的閉幕日相距三年零三日，當中包括 2 個平年、1 個閏年及三日，即 $2 \times 365 + 366 + 3 = 1099$ （相距總日數），由於 1099 除以 7 的餘數為 0，故巴黎奧運的閉幕日為香港時間星期日。

但利用同餘性質更能快捷計算。

$$365 \pmod{7} \equiv 1 \quad [365 \div 7 = 52 \dots 1]$$

$$366 \pmod{7} \equiv 2 \quad [366 \div 7 = 52 \dots 2]$$

2022 年為平年，2023 年為平年，2024 年為閏年，兩屆奧運的閉幕日的相差為 3 日，故兩屆奧運的閉幕日的同餘為 $1 + 1 + 2 + 3 = 7$ ， $7 \pmod{7} \equiv 0$ ，即 $7 \div 7 = 1 \dots 0$ ，故巴黎奧運的閉幕日為香港時間星期日。

註：巴黎及香港身處不同時區，加上巴黎奧運的日程表尚未確實，故閉幕日的確實時間或有更改，一切有待巴黎奧運官方公佈。

結論

透過引入適切有關數學史的教學活動，讓學生鑑古而知今，瞭解數學之美、其功用及發展過程，從而看見人類世界。教師亦能登高博見，在課堂教授數學時能做到順手拈來的境界。在現今碎片化學習大行其道下，教師們更應傳承數學的由來與其人民主義的面貌，令學生不單學習數學知識，

更能培養學生從文化角度來欣賞數學。

參考文獻

Fauvel. J. (1991). Using History in Mathematics Education, For the Learning of Mathematics, 11(2), pp.3 – 6.

夏恆 (2012)。數學史概論。蘭州大學出版社。取自

http://www.wenqujingdian.com/Public/editor/attached/file/20180612/20180612150438_34628.pdf

課程發展議會 (2017)。《數學教育學習領域課程指引 (小一至中六)》。香港：課程發展議會。

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏 (2019)。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。臺灣數學教育期刊，6(1)，27 – 51。

首作者電郵：ck.lee.isaiah@gmail.com