蘭利的偶然角難題（下集）

龍德義
退休校長

純幾何難題

首先還是揭盅那道被某網頁稱為『史上最難的初等幾何問題』（World's hardest easy geometry problem）筆者所作出的嘗試。假如有心水清的讀者問及：「究竟是最早由蘭利於 1922 年刊出的 60-50 版本，還是後期於 1974 年才告刊出的 70-60 版本？」筆者的回答是：「不用麻煩作選擇，乾脆一次過同時給出兩個版本的純幾何論證好了。」換言之，筆者打算一次過利用純幾何論證下圖兩個三角形的兩個未知角，$x = 30$ 度及 $y = 20$ 度。

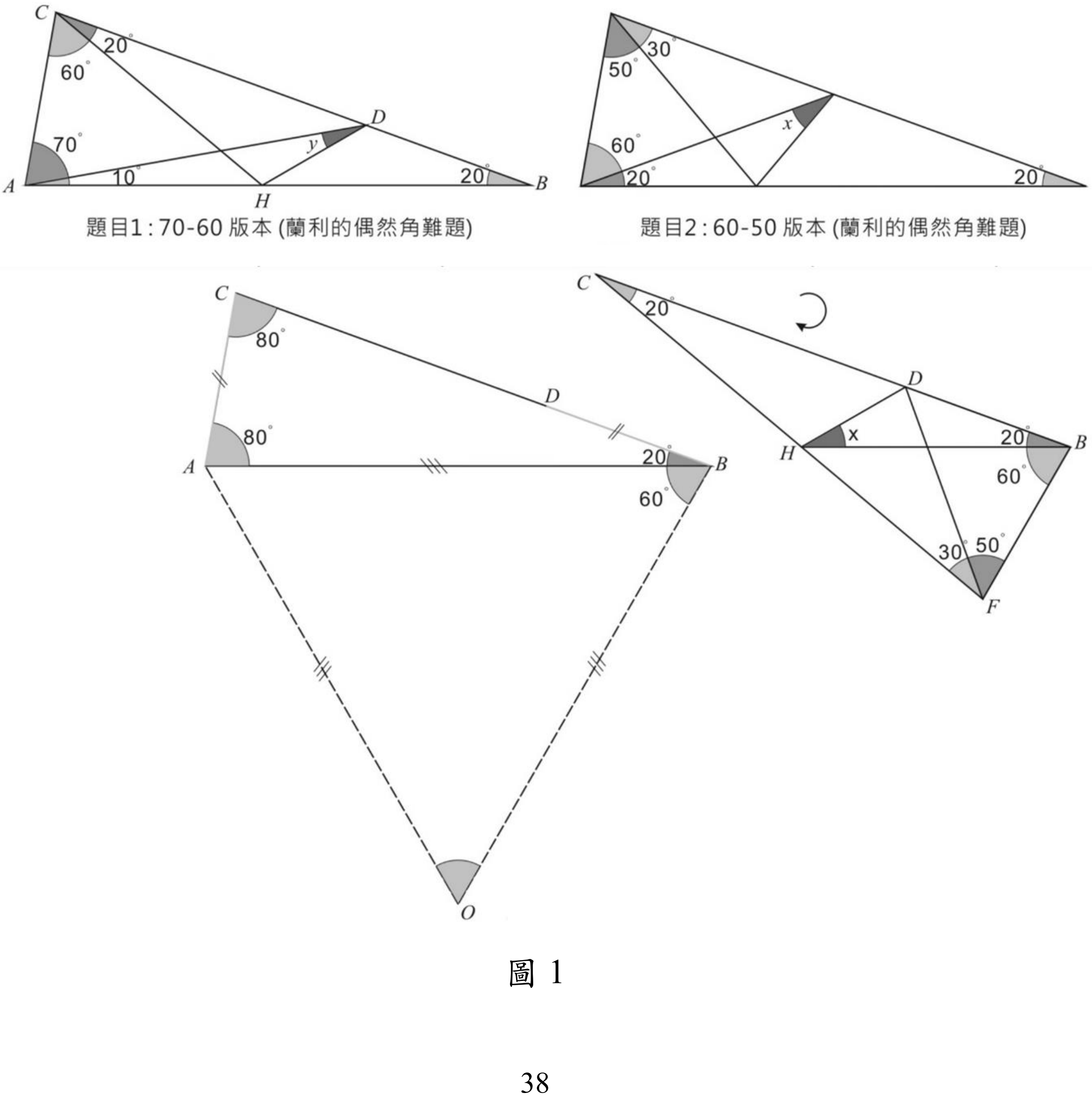


圖 1

為防部分讀者在圖形左旋右轉後，未能一眼望出未知角 x，筆者不嫌麻煩地添加了旋轉後的 60-50 版本，並且利用重合點具有相同的命名，預先提示證明過程當中，兩個版本將會重疊的部分。

從一個（80 度-80 度-20 度）等腰三角形 ABC 展開幾何論證。其中 $AB = BC$ 為腰。AC 為底，其長度較腰的為短。CB 線段上一點 D，使得 $DB = AC$。構作等邊三角形 ABO，使得角 $DBO = 80$ 度。不難證明三角形 ODB 與三角形 BAC 全等，構作角 AOD 的平分線 OE，使得角 $AOE =$ 角 DOE，且要求 $OE = OA = OD$。不難證明三角形 AOE、三角形 EOD，以及三角形 DOB 均與等腰三角形 ABC 全等，則 $AE = ED = DB = AC$。等腰三角形 AED 的底角，角 $DAE = (180 - 80 \times 2)/2 = 10$ 度。角 $DAB = 80 - 60 - 10 = 10$ 度，換言之，角 $DAC = 80 - 10 = 70$ 度。

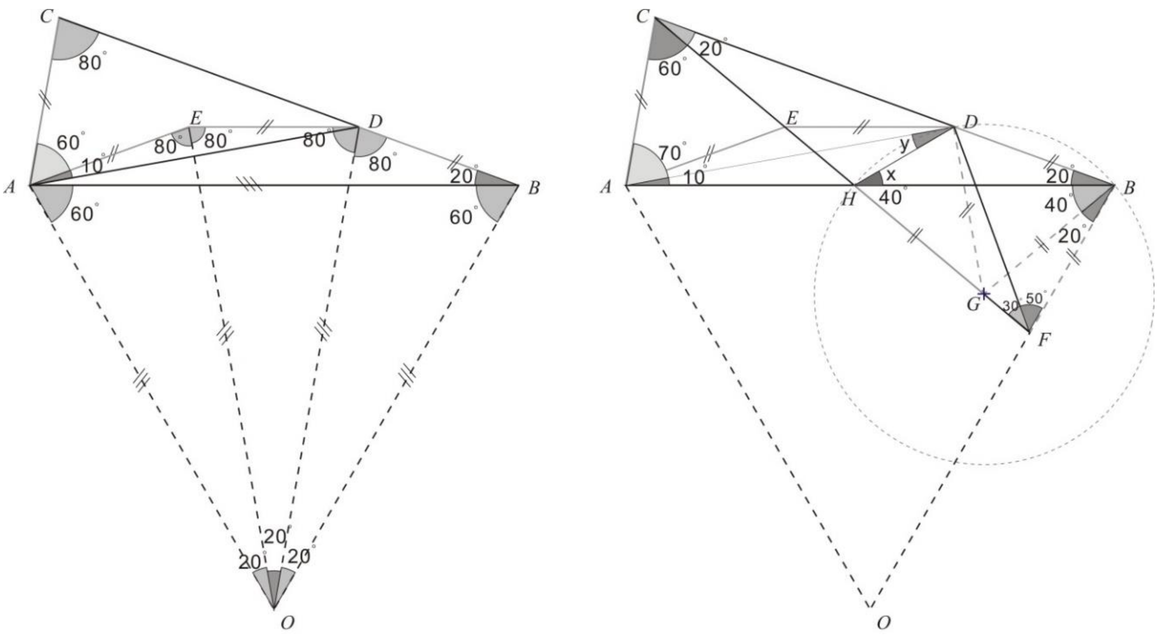


圖 2

另一方面，容易證明三角形 ACE 是個等邊三角形，故此，角 $ACE = 60$ 度。設 CE 延線分別相交 AB 及 OB 於點 H 及點 F。不難證明三角形 CBF 與三角形 BCA 全等，作圖位於線段 HF 上的一定點 G 使得 $BG = BF$，不難證明角 $FBG = 20$ 度。另一方面，利用角 $BHG = 20 + 20 = 40$ 度，從而證明了 $GH = GB$。再利用角 $DBG = 80 - 20 = 60$ 度，從而證明了 $GD = GB$。再連同 $GH = GB = GD$，G 是三角形的外接圓心，因此，$x =$ 角 $DHB =$ 角 $DGB /2 = 60/2 = 30$ 度，$y = x - 10 = 30 - 10 = 20$ 度。（論證完畢）

在互聯網絡上，容易找到 60-50 版本的純幾何論證，與筆者上述論證後半部份的大同小異，最關鍵的就是作一定點 G，使得 $BG = BF$，接著就認出和利用多條與底 BF 相同長度的線段，推論出 $x = 30$ 度來。不過，互聯網上有關 70-60 版本的純幾何論證則未有清楚指出一個（80 度-80 度-20 度）等腰三角形的腰與三段底之間的幾何關係。假如大家不拘泥於嚴謹的推理，可以想像將三個（80 度-80 度-20 度）等腰三角形，腰併腰，腰併腰，併合一起，再將另一個相同大小的等腰三角形如下圖般覆蓋其上，就「輕輕鬆鬆」得出筆者上述前半部分的論證，為的是找出構成 70 度線段的長度與底的長度或者與腰的長度間的關係。

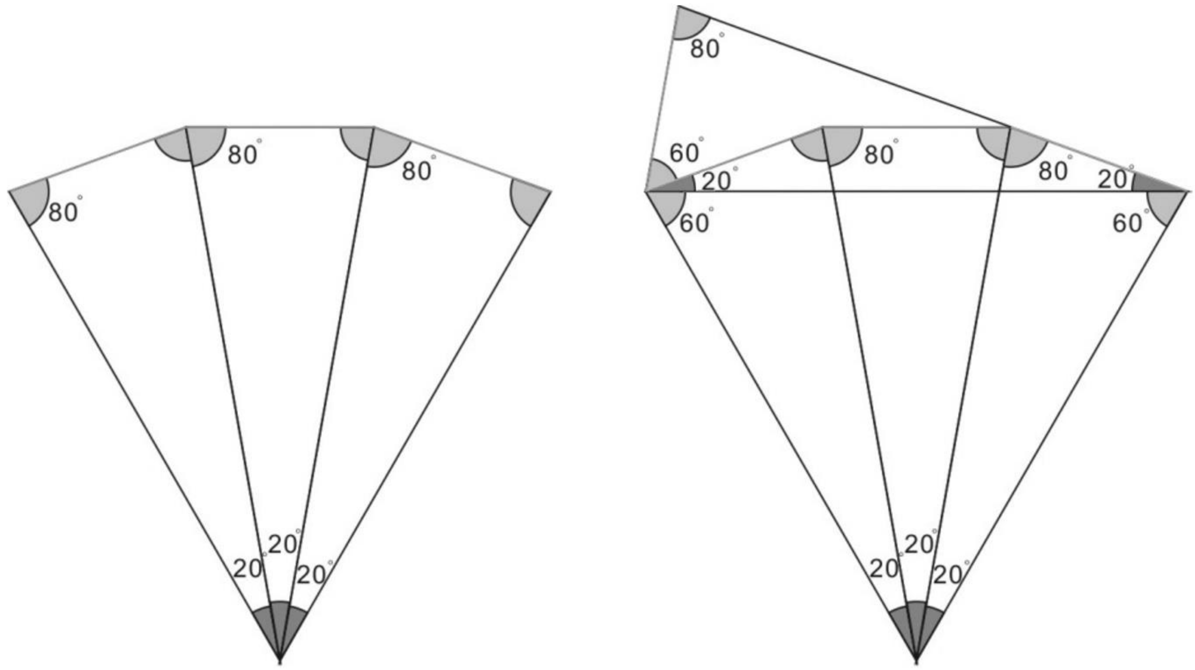


圖 3

筆者對嚴謹的邏輯推理十分尊重，不過也十分喜歡「輕輕鬆鬆」地、「暫時不求甚解」地欣賞簡簡單單的幾何圖案。有時候筆者也會漫無目的地創作一些幾何圖案，自娛一下，以下（80 度-80 度-20 度）等腰三角形圖案中，大部分線段的長度與底的長度相同。

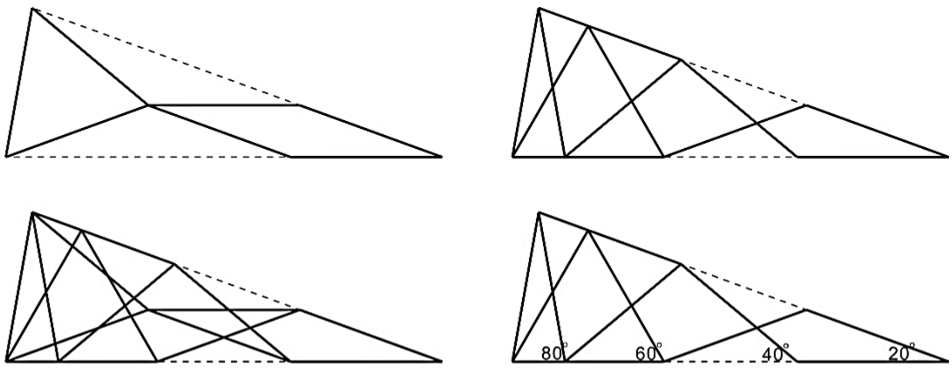
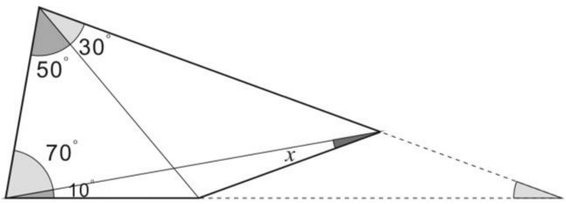
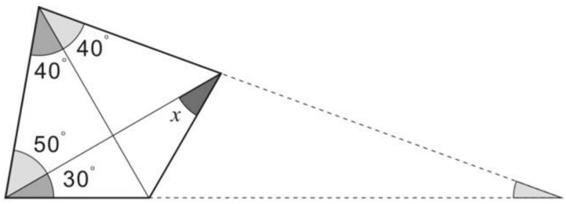


圖 4

雖說是「輕輕鬆鬆」，當然不失數學的真確性，讀者熟悉與底長度相同的線段後，適當地選擇某些線段，相信不難給出題目 3、4 的純幾何論證解題方法，亦即是嚴謹的邏輯推理。



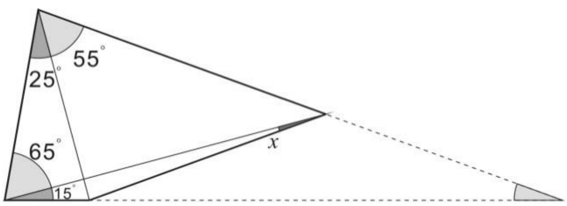
題目3：70-50 版本 (80-80-20度等腰三角形)



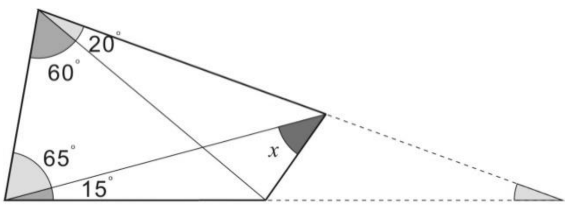
題目4：50-40 版本 (80-80-20度等腰三角形)

圖 5

至於，被筆者評定為「極之困難」的題目 5 及 6，應該不可能單單考慮與底長度相同的線段，就能找到純幾何的論證。而且，其困難程度將會被公認為較上述『史上最難的初等幾何問題』更難！真正體現了這個年代的一句潮語：「沒有最難，只有更難」。有趣的是，線段同樣「鑲嵌」在（80 度-80 度-20 度）等腰三角形內。好彩，一百年前蘭利沒有用上「史上最難的」，只是用了「偶然的」，筆者幸運地偶然間遇上了題目 5 及 6，未知再過一百年後，是否還有數學愛好者對這個題目有興趣？還再會有另一番的「偶然」呢？



題目5：65-25 版本 (80-80-20度等腰三角形)



題目6：65-60 版本 (80-80-20度等腰三角形)

圖 6

計算未知角 x 的三角學公式

回頭談談，運用三角學的正弦定理，找出下圖未知角 x 的公式，圖中 a、b、c、d 為已知角。

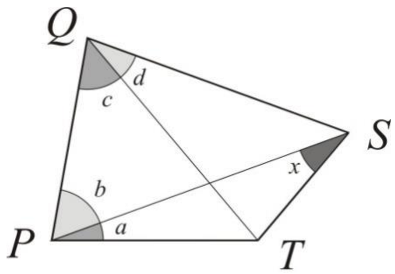


圖 7

由正弦定理，可得出 $\frac{PT}{PQ}=\frac{\sin c}{\sin(a+b+c)}$、$\frac{PQ}{PS}=\frac{\sin(b+c+d)}{\sin(c+d)}$、$\frac{PS}{PT}=\frac{\sin(a+x)}{\sin x}$。因為 $\frac{PT}{PQ}\times\frac{PQ}{PS}\times\frac{PS}{PT}=1$，所以 $\sin c\cdot\sin(b+c+d)\cdot\sin(a+x)=\sin(a+b+c)\cdot\sin(c+d)\cdot\sin x$，重新整理，可得出 $\tan x=\frac{\sin a\cdot\sin c\cdot\sin(b+c+d)}{\sin(c+d)\cdot\sin(a+b+c)-\cos a\cdot\sin c\cdot\sin(b+c+d)}$。筆者利用這個公式，透過電腦上的「試算表」，嘗試搜尋已知角和未知角同樣也是工工整整數值的組合。筆者在上集的文章，表列了 17 個組合，它們均符合一個額外條件 $a+b=c+d$，亦即是「等腰三角形」的條件。但其實沒有這個條件，可能還會得出更有趣的組合、處境。

整角四角形

筆者一面撰寫文稿，一面繼續在網絡上搜尋相關的資料，主要原因是不太相信相距這麼多年，這個不太艱深的數學問題，網絡上竟然只有極少資訊，而且沒有筆者期望的資訊。這些相關資訊不是太過簡單、重複別人的做法，就是過於抽象，超過筆者的能力範圍，一時間未能將這些抽象概念轉化成筆者能夠讀懂的數學語言。最令筆者費解的是題目 10 至 17 那組與（84 度-84 度-12 度）等腰三角形相關的，明顯就是蘭利偶然角的推廣，互聯網絡竟然沒有人提及！就算是數學家們覺得它們太「trivial」平常不過，那麼連數學教育工作者都對它們沒有興趣？奧數培訓導師呢？

另一個一直還在網上搜尋的重要原因是，筆者這次數學探究活動只是「孤軍作戰」，但又想希望弄清楚個人的臆測是否正確，譬如說，當上圖的圖形內已知角，以及未知角均為工工整整的話，英文名稱為 adventitious quadrangle，未找到正式中譯名稱；而日文譯名，稱為「整角四角形」。筆者個人即時反應，卻以為「整數角四角形」較易理解、較為貼切！殊不知，細心看清楚，英語文本為：the angles formed by the diagonals with the sides are all rational (when measured in degrees)。假若採用意譯的話，稱之為「有理數角四邊形」或許失卻了「偶然的」色彩，筆者暫時採納日譯名稱「整角四角形」。

筆者陸陸續續找到非等腰三角形的「整角四角形」組合，將部份的例子表列如下，尋覓過程中，還發現數個早前漏了眼的組合，譬如是（80 度-80 度-20 度）等腰三角形的 60-30 版本，更有趣的是（84 度-84 度-12 度）等腰三角形的 57-42 版本，增添了挑戰難度。

題號	a (單位:度)	b (單位:度)	c (單位:度)	d (單位:度)	x (單位:度)		純幾何解題困難度的我見
$a+b=c+d$ (84-84-12 度等腰三角形)							
題目 10	36	48	42	42	36	**題目 10**	淺易程度
題目 11	36	48	12	72	6	**題目 11**	淺易程度
題目 12	42	42	30	54	24	**題目 12**	中等難度
題目 13	42	42	18	66	12	**題目 13**	中等難度
題目 14	18	66	42	42	12	**題目 14**	中等難度
題目 15	18	66	54	30	24	**題目 15**	高等難度
題目 16	12	72	42	42	6	**題目 16**	**極之困難**
題目 17	12	72	66	18	30	**題目 17**	**極之困難**
	27	57	33	51	15	漏了眼	**極之困難**
	27	57	42	42	24	漏了眼	**極之困難**
$a+b=c+d$ (80-80-20 度等腰三角形)							
	20	60	30	50	10	漏了眼	中等難度
$a+b=c+d$							
	22.5	45	37.5	30	30	網上題目	中等難度
	30	390/7	330/7	270/7	240/7	網上題目	高等難度
$a+b\neq c+d$							
	22	66	46	30	30	蔡偉峰老師（2017）	
	38	46	22	48	18	網上題目	**極之困難**
	48	24	24	78	18	網上題目	**極之困難**
	18	144/7	24	450/7	90/7	網上題目	**極之困難**

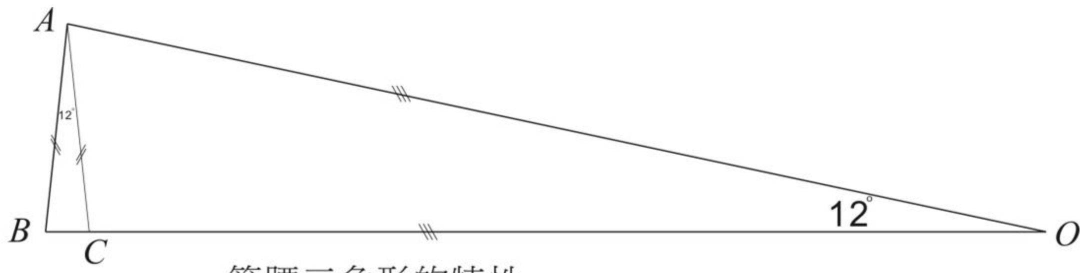
終究遇上

最終因為部分網頁在今次的抗疫期間，開放網頁的資源，公開讓大家免費在線閱覽，只需簡單以電郵地址作登記便可。早前筆者未能開啟的三數篇文章，現在可以即時在網上瀏覽，終於遇上筆者期待的資訊。它們四篇均刊登在著名數學教育學術期刊 *The Mathematical Gazette*，分別是 Adventitious Angles (Tripp, 1975)、Adventitious Quadrangles: a Geometrical Approach (Rigby, 1978)，以及期刊當年編輯先生的兩篇文章 The Adventitious Angles Problem: a Progress Report (Quadling, 1977)、Last Words on Adventitious Angles (Quadling, 1978)。

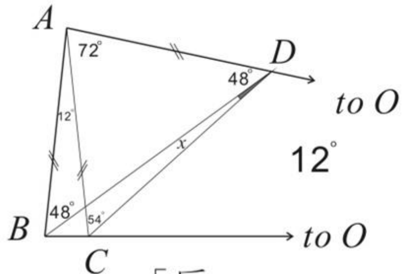
有興趣的讀者值得細讀上述文章。必須提出的是：原來只局限在「整數角」的推廣，Tripp 也曾作過細緻的探索，並且分享了他的發現，不過，簡單如正八邊形、正十六邊形相關的「整角四角形」組合，也定必出現 1/2 度、1/4 度的數值。因此，他寫道：「對於這個問題，其實沒有什麼特別原因限定 $\pi/180$（即 1 度）作為基本單位。不妨放寬至 π/N，其中 N 為任一正整數，『整角四角形』組合的要求則為 π/N 的倍數（當然是指整數 m，$m\pi/N$）。」

經發現相關文獻後，減少了筆者的心中的疑惑，可以集中介紹筆者個人的純幾何論證方法，或許可以幫忙補足這方面匱乏的資訊，至於網上相關的資料，筆者稍後詳細讀懂後，有機會的話，再向讀者介紹、詮釋。簡單一提，筆者覓得數個日文網頁，收錄了與「蘭利偶然角難題」相關的多款題目，甚具參考價值，是不錯的幾何學學與教的材料。筆者在文末列出有關網址，有興趣的讀者值得細心瀏覽。

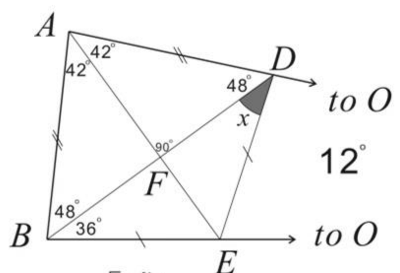
言歸正傳，首先了解一下等腰三角形的特性，我們可以利用底的長度 AB，以及其中一個底角 B，作圖一個細小的相似三角形，圖 8 中，就顯示了三角形 ABC 與原本的三角形 OAB 相似，這樣的特性是任何一個相似三角形均享有的。利用這個特性，再加上作圖線段 AD，其長度與底長度相同，且 D 為線段 AO 上的一點，可以輕鬆證明一系列淺易程度的「整角四邊形」題目，Tripp 文章有亦所提及，並用上一個匿稱「Fan」，筆者直譯為「扇」，即與題目 11 的類別相同的。另一系列的題目，Tripp 亦正路地用上匿稱「Kite」，筆者直譯為「鳶」，即與題目 10 的類別相同的。如圖 8 所示，讀者應了解到 Tripp 的取名是十分形象化呢！



等腰三角形的特性



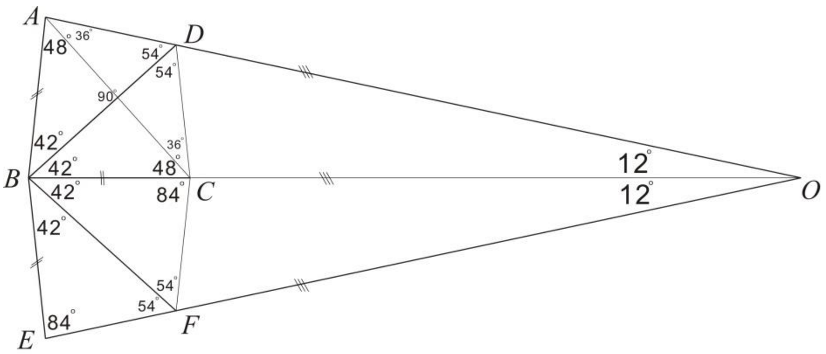
「扇」

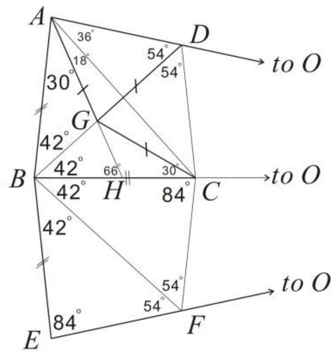


「鳶」

題目11：48-12 版本 (84-84-12度等腰三角形)　　題目10：48-42 版本 (84-84-12度等腰三角形)

圖 8





從上下對稱的兩個「鳶」開始　　利用上方「鳶」的垂直平分線的對稱

圖 9　**題目 12 至 14：42-30 版本、42-18 版本、66-42 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

至於，均涉及 42 度的三道中等難度的題目，題目 12 至 14，筆者的幾何論證則採用上下對稱的兩個「鳶」作為開始，如圖 9 中左圖。接著則在上方的「鳶」加入另一個「整角」，角 BAH = 30 度，其中 H 是線段 BC 上的一點。AH 與 BD 相交於點 G，因為角 $DAG = 84 - 30 = 54$ 度 = 角 ADG，所以 $GA = GD$。再利用 BD 垂直平分線段 AC 的對稱性質，$GC = GA\ (= GD)$，且角 GCB = 角 $GAB = 30$ 度。

作圖 GL 垂直 BC，GL 延線相交 BF 於 K，不難證明三角形 BGL 與三角形 BKL 全等，從而推論出 $KF = GD$，以及三角形 GKC 為等邊三角形，

利用 $KF = KG$，得知角 $KGF =$ 角 $KFG = 48/2 = 24$ 度，從而推論出 A、G、H、F 共線。同樣地，利用 $GD = GK$，得知角 $GDK =$ 角 $GKD = 48/2 = 24$ 度，從而推論出 D、H、K、E 共線。題目 12 的未知角 $BDH = 24$ 度，參看圖 10 最右圖。（題目 12 論證完畢）

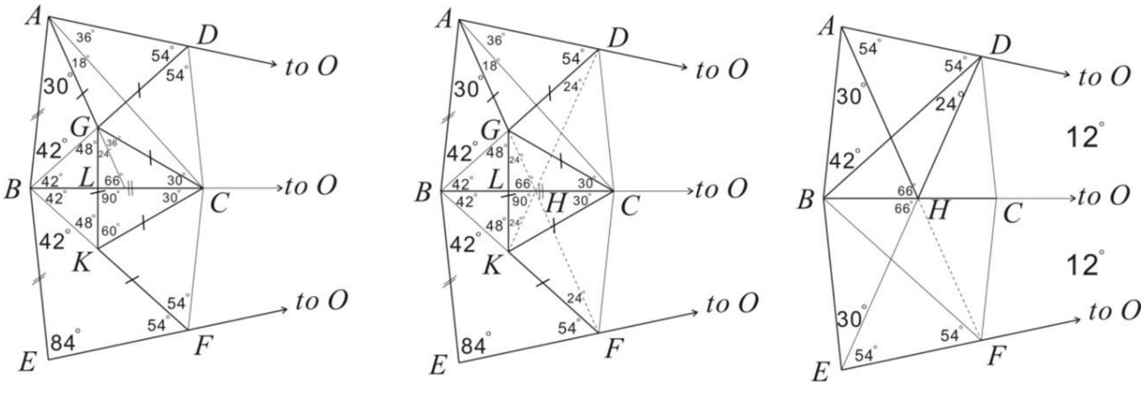


圖 10　**題目 12：42-30 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

至於，題目 13 同樣涉及 42 度，而另一個「整角」，是角 $BAM = 18$ 度。論證方法簡單，角 $EAD = 84 - 6 = 78$ 度 $= 54 + 24 =$ 角 EDA，因此 $AE = ED$，M 正是等腰三角形 AED 的外接圓心，換言之，題目 13 的未知角 $BDM = 12$ 度，參看圖 11 左圖。（題目 13 論證完畢）

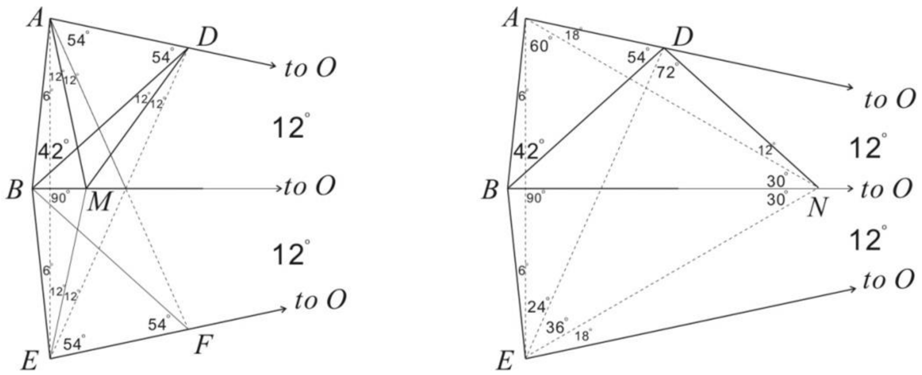


圖 11　**題目 13 至 14：42-18 版本、66-42 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

而題目 14 同樣涉及 42 度，而另一個「整角」，是角 $BAN = 66$ 度。論證方法同樣簡單，角 $EAN = 66 - 6 = 60$ 度 $= 30 + 30 =$ 角 ANE，因此 $AE = AN = EN$（即等邊三角形），加上 $ED = AE = EN$，換言之，題目 14 的未知角 $AND = 12$ 度，參看圖 11 右圖。（題目 14 論證完）

幾何論證題目 15，筆者選用了三個全等的（84 度-84 度-12 度）等腰三角形作為開始，這回筆者只打算講出關鍵重點，詳細的論證步驟就讓讀者

自行補上吧。讀者可以發現構作上下兩個等邊三角形後中間恰巧鑲嵌一個正五邊形。

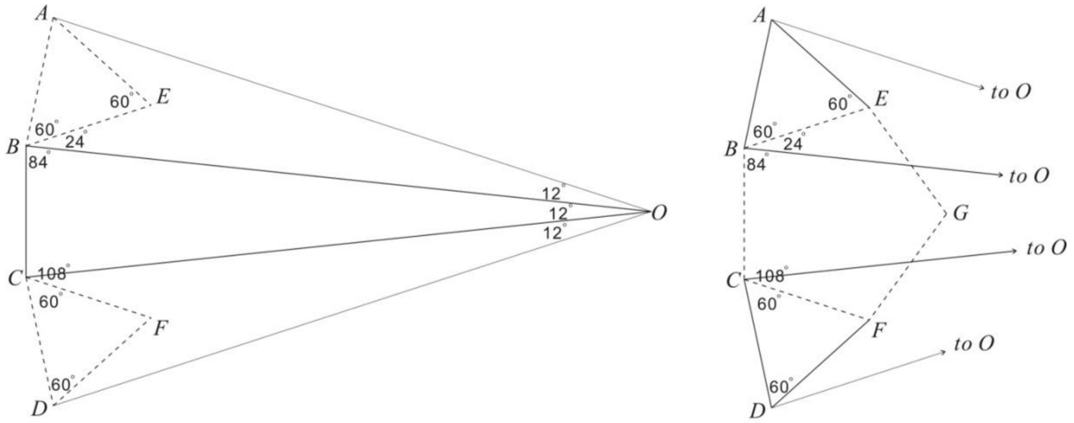


圖 12　**題目 15：66-54 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

再構作大一點的等邊三角形 ACH，其實已經大功告成。不難證明 $AC = AG = AH$，從而知道角 $AGH = (180 - 12)/2 = 84$ 度。另一方面，考慮等邊五角形內角，角 $AGD = 108 - 6 \times 2 = 96$ 度，合併兩者，推論出，H、G、D 共線。設 GD 與 CO 相交於 K，角 $CBK = 48 + 6 = 54$ 度，另一主角，角 $BCH = 60 + 6 = 66$ 度，換言之，題目 15 的未知角 $CHK = 84 - 60 = 24$ 度，參看圖 13 右圖。（題目 15 論證完）

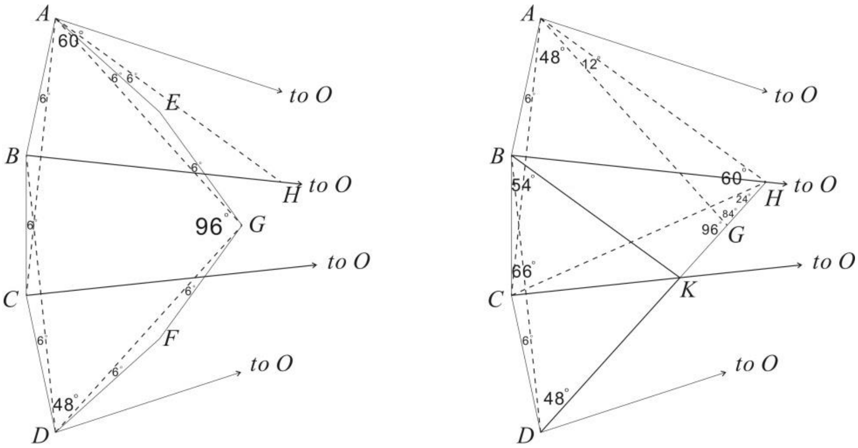


圖 13　**題目 15：66-54 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

有趣的是，我們可以利用圖 13 左圖，重新論證題目 14。這回要考慮六邊形 $ABCFGE$，當中對角線 AF 是對稱的，設 AF 與 CO 相交於 L，$LE = LB$，參看圖 14。再利用 OC 垂直平分 BD，得知 $LB = LD$。同理 DE 是六角形 $DCBEGF$ 的對稱對角線，輕易計算出三角形 EBD 的每個內角的角度，分別

是 54 度、102 度、24 度。加上剛剛證實的三條等長線段，$LE = LB = LD$，設角 $LED = y$，則有 $(54 + y) + (24 + y) = 102$，解方程 $y = 12$ 度，從而得證角 $CBL = 6 + (24 + 12) = 42$ 度。往後的論證，筆者不再重複，提示大家：不要忘記重新論證 $AL = AC$ 呢。

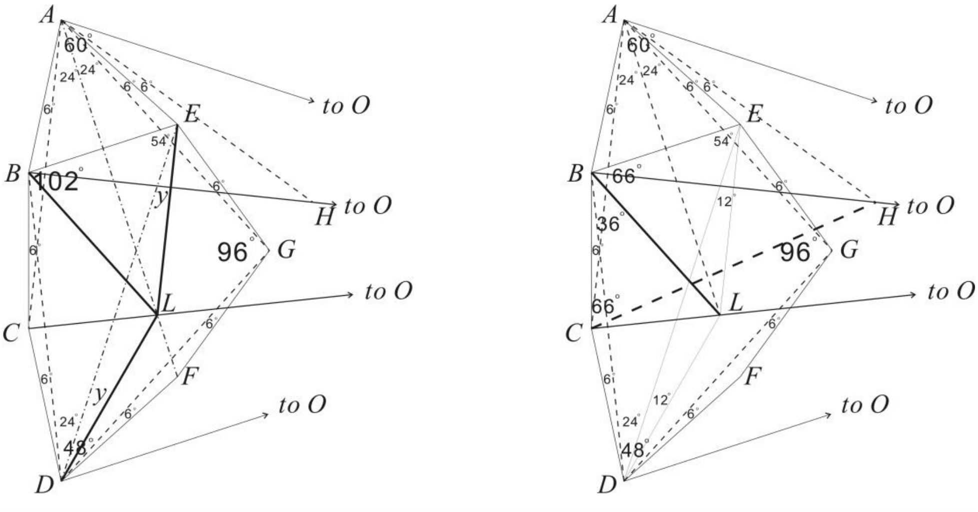


圖 14　**可以重新證明題目 14：66-42 版本 (84-84-12 度等腰三角形)**

後記

篇幅所限，筆者今次「蘭利偶然角難題」的純幾何論證方法介紹暫且結束。讓筆者詳細讀懂網上相關的資料後，再向讀者介紹、詮釋。

在此要再次多謝三位現職數學老師，蔡偉峰、麥建偉和梁子傑，仗義幫忙審閱本文初稿，修正別字和錯處。

參考文獻

Tripp, C. (1975). Adventitious angles. *The Mathematical Gazette, 59*, 98–106, JSTOR 3616644.

Quadling, D. A. (1977). The adventitious angles problem: a progress report. *The Mathematical Gazette, 61*(415), 55–58.

Quadling, D. A. (1978). Last words on adventitious angles. *The Mathematical Gazette, 62*(421), 174-183.

Rigby, J. F. (1978). Adventitious quadrangles: a geometrical approach. *The Mathematical Gazette, 62*(421), 183–191.

初等幾何で整角四角形を完全制覇

https://www.gensu.co.jp/saito/challenge/pdf/3circumcenter_d20180609.pdf

幾何大王からの挑戦状～ 過去問＆解答集 ～

https://web.archive.org/web/20131102151203/http://www.gensu.co.jp/saito/challenge/index.html

補助線が鍵になる初等幾何の問題

http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/index.html

Langley の問題とその一般化問題の解法 (コンピューター利用の一方法)

http://www.shotoku.ac.jp/data/facilities/library/publication/education-kyoiku43_04.pdf

作者電郵：takyeelung@yahoo.com.hk