由代數式加減到複數運算的教學

梁子傑　馮杰能　麥嘉健
天主教鳴遠中學

雖然在很多人心中，代數式的加減是最簡單和最容易的課題，但是如果在教學上未能處理好一些細節，那麼對學生將來繼續學習相關的課題時，會帶來負面的影響，不容忽視。

在現時一般的教科書中，當首次引入代數式加減的例題時，其解答通常都會以 4 行式表達：第一行只是將題目重複抄寫一次，第二行移除代數式的括號，第三行將同類項放在一起，第四行合併同類項從而獲得答案。為了幫助學生記憶這些計算步驟，我們分別稱第 2、3 和 4 行的目標為「拆括號、排次序、計答案」（如例一）。

例一　化簡 $(2a + 5b) + (4a - 6b)$。

解
$$
\begin{aligned}
& (2a + 5b) + (4a - 6b) & \\
=\ & 2a + 5b + 4a - 6b & \leftarrow \text{拆括號} \\
=\ & 2a + 4a + 5b - 6b & \leftarrow \text{排次序} \\
=\ & \underline{\underline{6a - b}} & \leftarrow \text{計答案}
\end{aligned}
$$

過去的經驗告訴我們，某些學生會覺得寫足 4 行的表達很麻煩，經常會省去其中的一兩個步驟而直接跳至答案。問題是：我們身為教師，會容許學生忽略哪些步驟呢？

第四行是答案，照理學生不可能忽略。第一行是題目，若果學生在打印好的工作紙或試卷上作答，題目已經印在試卷上，或許有學生會省略抄寫題目，這也無可厚非。所以，最值得討論的，是學生可以省去第二行「拆括號」還是第三行「排次序」呢？

根據經驗，很多學生會選擇刪去第二行，直接跳至第三行，甚至立刻寫出答案！不過，在這個程之中，學生都通常犯了一個嚴重的錯誤。那就是

當計算兩個代數式之差時，學生往往會忽略了減號後的括號內所有加號和減號要分別地轉成減號和加號的原則，因而求得錯誤的結果（見例二）。

例二　化簡 $(8a-3b)-(9a-2b)$。

錯誤示範

解 $= (8a-3b)-(9a-2b)$

$= 8a-9a-3b-2b$ ← 未有轉換加／減號

$= \underline{\underline{-a-5b}}$ ← 錯誤答案

我們沒有對學生犯這個錯誤的原因作深入的調查和分析。估計造成這個錯誤的原因，有可能是因為學生貪快，並認為第二行和第一行「大同小異」，直覺上覺得將題目重抄一次，過於浪費時間。而第三行將多項式各項重新排列，動作明顯，讓人有一種「做了很多事情」的感覺，心理上也有點安慰。很可惜，學生並未能掌握第二行的重要性，亦未明白貿然跳至第三行，確實是危機四伏的。

為了令學生在書寫第二行時有較良好的感覺，我們除了再三提點和解釋第二行的重要性外，亦提倡在第二行中加入不同的底線，一來用於區分異類項，將同類項聯繫起來，二來可以借助此記號來把同類項歸類，從而減省第三行（如例三）。我們希望學生願意嘗試採用之餘，亦可減少他們犯錯的可能性。

例三　化簡 $(8a-3b)-(9a-2b)$。

解 $(8a-3b)-(9a-2b)$

$= 8a-3b-9a+2b$ ← 拆括號、加記號

$= \underline{\underline{-a-b}}$ ← 計答案

我們亦曾經做過一點非正式的統計，發現我們身邊的教師多數都與我們的觀點一致，不同意和不鼓勵學生減省第二行。不過，我們亦驚訝地發現，在目前多數中學所採用的幾套高中教科書中，竟然至少有兩套教科書採用減省第二行的手法來展示例題的題解！

說得準確一點，這些例題不是來自代數式或多項式的加減。這些例題其實是來自複數的加減運算。在那些教科書中，作者都採用如例四般的方式來求兩複數的和或差。

例四	求 $(2+5i)+(4-6i)$。	
解		$(2+5i)+(4-6i)$
	$=$	$(2+4)+[5+(-6)]i$
	$=$	$\underline{\underline{6-i}}$

單從題解可見，那就是不寫「拆括號」，直接跳到「排次序」和「計答案」了！

起初我們感到很奇怪，既然大多教師都認同「拆括號」的重要性，那麼為何這些教科書會反其道而行呢？

仔細看看那些教科書在展示這個例題之前的解說，我們或許找到一個答案。

複數加減當然來自討論複數的那一章節。在該章節開始時，會解釋甚麼是 i，甚麼是實部，甚麼是虛部等基本概念，然後就是引入複數的加減。複數加減建基於一個原則：複數相加等於實部與實部相加、虛部與虛部相加；複數相減也類同，因此得到以下的定義。

定義　若 $z_1 = a + bi$，$z_2 = c + di$，

則 $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ 及

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$。

而例題的解答就按這定義來進行運算。

縱觀全章節的脈絡，我們同意教科書的寫法完全乎合邏輯，亦與大多數純數學的教材或參考書所表達的方式一致。但是利用這方式引入複數的加減，豈不是要求學生多記憶一個數學定義，然後只是按照定義來計算？他們究竟是否明白定義背後的意義與及這定義和他們以前所學的內容有甚麼關係呢？更何況，跳過拆括號這一步容易出錯，學生按照這方法進行運算，也欠穩妥。

事實上，假如我們將 i 看待成一個類似 a 或 b 的代數符號，那麼複數加減與代數式加減基本上是沒有分別的，我們可以按照前面提及的步驟「拆括號、排次序、計答案」來完成，學生也容易理解和接受，何必要額外多加一個計算法則呢？（見例五。）

例五　求 $(2 + 5i) + (4 - 6i)$。

解　$(2 + 5i) + (4 - 6i)$

$= 2 + 5i + 4 - 6i$　← 拆括號

$= 2 + 4 + 5i - 6i$　← 排次序

$= \underline{\underline{6 - i}}$　← 計答案

何況，當學生對加減有一定的經驗之後，相信他們都可以自行歸納出複數加減的定義，那又何必老師在開始的時候，強加一些法則給學生呢？

代數式和複數加減雖然簡單，但亦可以帶出一個深刻的問題：我們在鋪排教學內容時，應否完全按照數學結構的邏輯而進行呢？

照道理，我們未有複數加減的定義之前，不應該要求學生計算兩複數的和或差。但如此編排卻要學生強行接受一個新定義，為學生加添無謂的記憶。雖然先要求學生計算複數的和差，然後才引入定義，邏輯上有點古怪，但卻可以令新的定義與舊有的知識結合，令學習變得更有意義，何樂而不為？

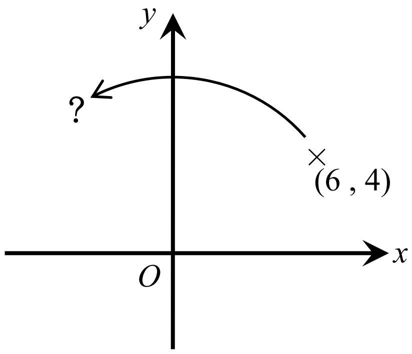
最後，在結束本文之前，讓我們介紹一下我們近來如何在課堂上引入複數的概念。

按現行多數教科書的進路，在完成二次方程求根公式的介紹之後，會討論判別式的用處，然後就提出：當判別式小於 0，而我們又希望可以求得方程的解時，那麼我們就要接受負數有開方，從而引入 $i = \sqrt{-1}$ 的記號。雖然大多數教科都採用這方法來引入複數，但是都同樣有一種強迫學生接受一個他們不能理解的事物的感覺。

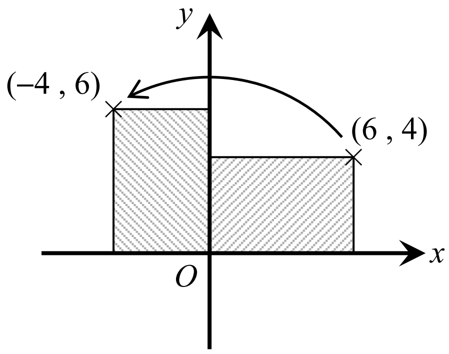
為了令學生較容易接受複數，尤其是 i 的概念，我們嘗試從複數的幾何概念著手，先讓他們認識複數在幾何上的應用。

根據課程，初中時候會學習座標和求一點以原點為中心旋轉 90° 後的座標，例如：求 $(6,4)$ 以原點為中心逆時針旋轉 90° 後的座標。不要以為這類題目簡單容易，學生必定能說出正確答案。事實上，不少學生會誤以為答案是 $(-6,4)$！他們犯錯原因，不是因為他們不懂得畫圖，而是他們掌握不到旋轉 90° 之後，該點應該到達哪一個位置。

為了解決這個問題，我們提議他們在畫圖時，不單畫出點的位置，更應該以原點和已知點為對角線，畫出相關的長方形。我們與其旋轉一點，倒不如以原點為中心，將整個長方形旋轉。由於當旋轉長方形時，長方形的長和闊會交換位置，因此學生會更容易掌握所求的座標（見圖一及二）。

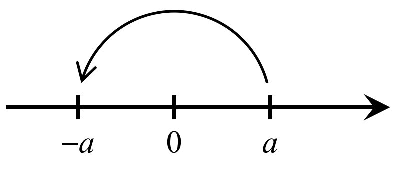


圖一

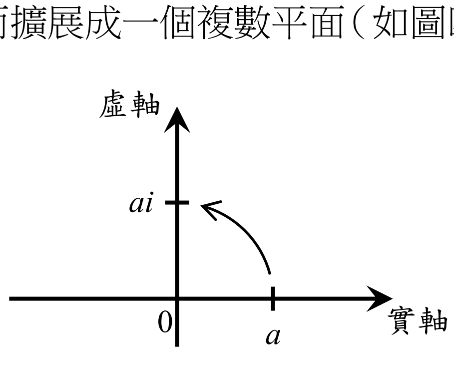


圖二

相信大家同意，學生抗拒接受 i 的原因是因為在實數線上找不到它的位置。因此，在引入虛數 i 時，我們先與學生討論一個實數 a 乘上 -1 的幾何意義。由於 $a\times(-1)=-a$，因此我們可以理解這等同於將 a 以 0 為中心旋轉 180° 後的結果（如圖三）。由於 $i\times i=-1$，因此我們可以將 “$a\times i$” 這個運算理解為「將 a 以 0 為中心旋轉 90°」，從而由一條實數軸（即我們一向認識的實數線）發展多一條虛數軸，繼而擴展成一個複數平面（如圖四）。



圖三



圖四

為了證明 “$a \times i$” 有「旋轉 90°」的效果，我們將座標 $(6, 4)$ 以複數表達成 $6 + 4i$，再計算 $(6 + 4i) \times i$ 的結果（見例六）。

例六　求 $(6 + 4i) \times i$。

解

$$\begin{aligned} & (6 + 4i) \times i \\ = \; & 6i + 4i^2 \\ = \; & 6i - 4 \\ = \; & \underline{\underline{-4 + 6i}} \end{aligned}$$

明顯，例六的計算結果與前面從圖二所觀察到的結果吻合。

我們明白，複數的幾何意義並不包括入目前中學公開考試的範圍，但這個簡單的引入卻能令學生易於接受 i 這個「異物」，亦能提供一個處理座標旋轉的一個有效方法。同樣，何樂而不為？

首作者電郵：jckleung@netvigator.com