

考試文化與數學教學

李秉彝
新加坡教育學院

張龔宙
上海華東師範大學

鄭正亞
湖南零陵師專

世界各國的學校在錄取新生時,都要依據考試成績,少有例外。即使在講究“推薦”的美國,一項全國通用的 SAT (Scholastic Aptitude Test) 成績,也是進入大學所不可少的。但是,由於社會文化背景的不同,入學考試競爭的激烈程度,考試成績對錄取新生的作用,各國的差異很大。在東亞,大學入學考試已經成爲一個嚴重的社會問題。中國大陸的“高考指揮棒”,台灣的“大學聯招”,日本的“大學入學考試”,都是令人談虎色變的“考試地獄”。在香港,新加坡等使用漢字的地方,也都有類似的現象。這就不得不從文化的層面上去分析了。

東亞的數學教學當然會受到考試文化的不利影響,然而,東亞各國的中學生在國際性數學測試中的表現又相當良好。日本在兩次 IEA 國際評估中都遙遙領先,中國於 1989 和 1990 連續獲得中學生國際奧林匹克數學競賽冠軍,東亞地區的學生在 IAEP 調查中,數學成績名列前茅,就是明證。因此,考試文化對數學教學影響的利弊得失,尙需進行仔細的分析。

中國封建科學的歷史影響

中國在魏晉南北朝時期(公元 220-580年),盛行門閥制度,講究出身門第,官吏都是世襲,爲了使平民百姓中有才能的人也可以做官,遂有通過考試選拔人才的“科舉”制度的出現。隋文帝開皇七年(公元 587年)開科取士,爲科舉的開始。唐朝(公元 618-907年)時設立“明算科”,通過考試後要交吏部錄用^[1],這意味著通過數學考試也可以做官。在對抗門閥世襲制度這一點上,科舉考試起了歷史進步作用,但“明算科”時興時廢,到明清兩代(公元 1368-1910年)幾乎停止,直到 1877年才又把算學列爲科舉科目,1888年 32人報考算學科,錄取了一名“舉人”^[2]，“學而優則仕”，“通過一次考試選拔人才”，“一次科舉考試決定一生命運”，這就是中國考試文化的傳統。

日本在江戶時代也實行世襲制度：入學考試是明治維新以後的事，正因為“考試”是對“世襲”的否定，升學考試就成為“選拔人才”，決定一個人一生命運的關鍵。人民在歡迎“公平競爭”的考試制度的同時，也就面臨著“考試地獄”的弊端。在數學方面，日本的尾關正求編出《數學三千題》(1879)和《實用數學新三千題》(1888)，使“求答主義”盛行一時。中國曾大量翻譯日本的《幾何學辭典》等書籍，多年暢銷。可以說，中日兩國的數學教學都有考試文化的背景，許多方面有著共同的淵源，並且互相影響^[3]。

中國高考與美國 SAT 測驗的比較

	中國高考	美國 SAT 測驗
組織	國家統一進行，每年一次	民間組織負責，一年多次
社會背景	通過考試進入上層，或從鄉村進入城市，對前途影響巨大	SAT 成績與個人前途的關聯不很密切
功能	篩選，少數人通過	測定學術傾向，多數可及格
大學錄取	一卷決定，以分數劃線	僅供參考，輔以其他手段
考試範圍	統一考試大綱，不得超越	以常識性內容為主
試題	多且難，以資區分	淺易，選擇題，便於閱改

中國民眾認可“一卷定終身”式的考試競爭，覺得它能避免推薦中的弄虛作假，以及人際關係而造成的不公平待遇，社會輿論讚揚“高考狀元”，甚至把高考成績優良和“優秀人才”等同看待，這些都是考試文化的典型反映。

東亞考試文化對數學教學影響的評估

考試文化對數學教學有許多好的影響。由於考試競爭需要，家長從嚴要求子女的數學基本技能，如背九九表，心算等。教師加強解題教學，使學生在“大運動量”訓練中形成熟練、準確運算技巧，掌握大量的解題模式和證題規律，因此，東亞各國和地區在國際性數學測試中都有極好的表現，日本數學教學更成為世界各國爭

相研究的追趕目標，這裏列出兩種國際數學測試中東亞諸國的平均成績(部分國家)^{[4] [8]}

IEA調查(1987)

	幾何	代數
香港	65	78
日本	60	78
英國	51	66
瑞典	49	60
美國	28	38

IAEP調查(1992)

	13歲學生數學成績
中國大陸	80
韓國	73
中國台灣	73
瑞士	71
原蘇聯	70
美國	55

再以1990年美國的SAT成績來分析，亞裔的數學成績最好。數學總平均分：476；白人的平均分：491；非洲裔：385；拉美裔：429；亞洲裔：528。

在高層次數學人才中，亞裔比例也很高。1989-90年度美國產生933名數學博士，其中330人為亞太裔，華人竟佔227人^[9]。亞裔學生的數學成績已為美國社會所公認。

另一方面，考試文化背景對數學教學也有負面影響。一般認為，“考試數學”乃是為升學的“精英”們服務的，不是面向大多數的“大眾數學”。中小學生升學壓力太大，負擔過重。學校追求升學率，考甚麼教甚麼，形成偏向，不利全面發展。因此，中國大陸和台灣都在大力改革“高考”和“聯招”。這裡，想就“考試數學”的教學現狀和“大眾數學”理想要求作一對比，以供分析。

	考試數學	大眾數學
教學目的	解答考題，提高升學率	適應日常生活和就業的數學需要
學習動機	社會和家長對升學的期望	學生對數學的興趣
數學知識的作用	篩子。用以區分學生的能力	工具，理解實際現象，加強思維
數學內容的安排	形式化的演繹體系，系統化的考題解答技巧。窄而深	非形式化的體系：著重數學觀念的建立，解決實際問題。寬而淺
數學課程中的基本訓練	快速準確的計算技能，心算，嚴密證明，完整解答考題	會計算，強調理解數學含義，解答現實的數學課題，重個人創造
教學重點	常規習題和考題的求解模仿現成解題模式	非常規數學問題求解 (Problem Solving)
教學方法	加強基本訓練，演算大量習題，歸納程式，熟能生巧	在基本訓練基礎上，強調個人發現，獨立思考，但進度慢
課業負擔	課時多，“大運動量”，負擔極重	課時、作業均較少。依靠學生自覺和興趣閱讀課外數學讀物
學生對數學的態度	不喜歡數學，覺得難學而無用。在喜歡數學的 IEA 調查中，日本倒數第一	一般，在 IEA 調查中瑞典中學生最喜歡數學
數學人才的培養	基本訓練好，後備人才多	少數學生熱愛數學，創造力強

船長年齡問題

有一則歐洲笑話是：“一條船上有75頭牛，32頭羊，問船長幾歲？”

我們在浙江一所小學四年級，對 78名學生測試，只有 8名學生說此題不能做，其餘 70名學生都有答案：43。後來在山東濟寧市對初一、初二學生測試，答案為 43 的學生也佔 82%！甚至在上海一所重點中學的 32名高三學生中，也有 11人得到 43 這個答案。為什麼會有這麼多的學生給出答案？學生們回答說：“老師出的題目都是能做的。”“老師說過，考卷上的題目如果不回答是零分，如果寫

上一些，可能有分數。”考試之負面影響，可見一斑。(1993, 1994, 1995 測試結果)

一次測驗所見

當前中國大陸的數學教學，深受升學考試的影響。我們要問，升學考試優勝的學生，在解非常規數學問題時能力究竟如何？會做升學考題的是否也會做需要更多思考的非常規數學題？爲此，我們請安徽省黃山市屯溪第二中學的胡林瑞老師，作了兩次測驗。該校不是重點中學，學生就近入學，未經挑選。這次測驗的試題選自英國，美國，意大利和日本的非常規數學題各一，滿分爲 30 分（見附錄）。1989 年的測試結果已經發表^[6]。以下的統計包括 1990 年的一次測試數據，基本的結論是：

- (1) 高中學生（平均分 7.2）不比初中學生（平均分 6.63）好很多。即面對新接觸的國外數學題，多讀三年數學課，並無太多幫助。
- (2) 升學考分高低與此次考分的相關很小。我們用 A 和 \bar{A} 分別表示升學分高於和低於平均分， B 和 \bar{B} 表示此次能力測試分高於和低於平均分，則有下列結果：

	A B		$\bar{A} \bar{B}$		A \bar{B}		$\bar{A} B$	
	人數	比率	人數	比率	人數	比率	人數	比率
1989 初中生 40 人	5	12.5%	14	35%	18	45%	3	4.5%
1990 初中生 30 人	6	20%	13	43.3%	9	30%	2	6.7%

這表明，兩種考試都好的學生不到 20%，而升學考試好但能力測試差的竟達 45% 和 30%。

- (3) 在這所非重點中學裡，一位考入中國科技大學的優等生，在此次能力測驗中得了滿分，一些參加課外數學興趣小組的高中學

生 (12人), 平均分達到11.25, 比一般高中生的平均分 7.2 要高出許多。由此可見, 對優秀學生來說, 升學考試成績與能力是一致的。另外, 只要改變“考試數學”的傳統模式, 普通中學裡學生的數學潛力還相當大。

幾點看法

- (1) 考試文化是中國傳統文化的一部份, 淵遠流長。一種文化現象的改變, 不能用行政手段加以“廢除”, 而要從改革社會經濟條件入手, 逐漸變易。東亞各國, 無論社會制度如何, 都存在所謂“考試地獄”現象。多年來大家都想改革升學考試制度, 可是至今沒有大的成效, 其原因就在於這是一種文化現象, 只靠政府命令是不夠的。
- (2) “考試數學”是一把雙刃劍, 正面和負面的影響都有。在東亞各國, 社會和家長對學生的數學學習有很高的期望, 數學教學重視基本訓練, 強調心算, 注意邏輯思維能力的培養, 出現了東亞數學教學成績冠於全球的局面, 很不容易。在任何時候, 重視數學基本訓練的傳統, 都是不能丟掉的, 至於負面影響, 當然也應該加以克服。但這首先是數學教學思想的轉變, 例如, “大眾數學”的設想, 就可以作為借鑑。
- (3) 中國大陸的數學教學, 受“高考指揮棒”的影響特大, 所走的路似乎更窄一些。在日本, 學生能否升學, 業餘補習學校承受許多責任, 國家指導的學校還能夠少受升學考試的影響, 較多按教學規律辦事。此外, 教科書多樣化, 各大學有自己的入學考試, 也會使數學教學有更多的選擇。尤其是中國大陸的數學考試範圍, 較東亞各國窄得多, 如微積分、矩陣、概率統計等都不考。表面上減輕了學生負擔, 但因升學考試競爭的劇烈程度並未由此得到降低, 使得數學教學內容在很窄的範圍裡越教越深, 往往鑽入牛角尖, 完全違背了初衷。
- (4) 升學考試題目的類型應是改革的重點。高考試題具有極強的指揮作用, 每年的考題直接影響下一年的教學。從中國大陸的數學考題來看, 考題忽視數學的應用, 很少數字計算, 數學思維方式單一 (生怕超出考試大綱), 已對數學教學造成不良影響。美國SAT測驗的試題, 都很淺易, 但往往貼近日常生活。如: 馬丁和愛莉斯買進報紙時每份 0.20元, 賣出時 0.25元。到周末

馬丁獲利 12.60元，愛莉斯獲利 18.75元，問愛莉斯比馬丁多賣幾份報？又如：一球隊贏了十場，輸了五場，若以後連贏 k 場，它可贏得 80%的場次，問 k 是多少^[7]。此類題固然容易，但不屬“牛角尖”一類，在中國大陸的考題裡很少見。確實，如何出好一份“升學考試題”，倒也是值得國際性（特別是東亞各國）探討的一個問題。

- (5) 1998年在漢城將召開東亞數學教育會議，考試和文化將是兩個重要的研究課題。通過共同討論，提出對策，也許會對 21 世紀的東亞數學教育，有莫大裨益。

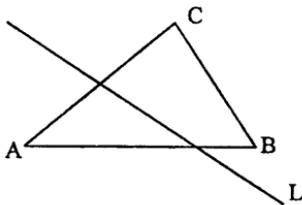
參考文獻

- [1] 李迪：中國數學史簡編。遼寧人民出版社。1984。p.140。
- [2] 朱有獻：中國學制史資料。第一輯，華東師範大學出版社。1986。
- [3] 張奠宙等：近代數學教育史話。人民教育出版社。1991。p.27，182。
- [4] U.C. Lehner, Youth in Japan, U.S. Reinforce Culture Gap Between the Nations. The Wall Street Journal, June 15 1990, A1.
- [5] 紐約世界日報消息。1990年6月28日，1990年7月27日。
- [6] 胡林瑞：國外數學題的一次測試所見。《數學教學》，上海，1990年第3期。
- [7] A. DePalma, Revisions Adopted in College Entrance Tests. New York Times, National, November 1, 1990.
- [8] The International Assessment of Education Progress. Learning Mathematics, 1992.

附錄

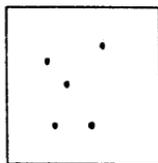
四個測試題和評分標準

1. 若有五張紙片，其中的每一張可以再撕為五張小紙片；也可以不撕。小紙片可以再撕為五張更小的紙片，也可以不撕。如此繼續下去，能否撕出 1993 張小紙片？（選自英國）
（滿分為 5 分，只回答“能”或“不能”而不說明理由者不給分。具體給出一種撕法的給 4 分。）
2. 已知三角形 ABC 及直線 L，如圖一。試以直線 L 為對稱軸畫出 ABC 關於 L 的軸對稱圖形。（選自意大利）
（滿分為 5 分。要求各對稱點及其聯線的位置準確，無大的誤差）

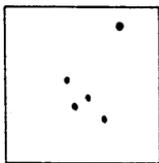


圖一

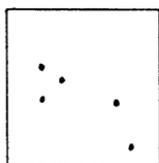
3. 有一直線上配置五台機床，并在此直線上設一零件供應點。
試問：(1) 在何處設供應點，可使它與各機床的距離總和最小？
(2) 如改為 6 台機床，供應點應設在何處？
(3) 考慮 N 台機床的情形。（選自美國）
（滿分為 10 分。(1) 題為 2 分，(2) 題為 3 分，(3) 題為 5 分。）
4. 三個學生 A, B, C, 丟五顆石子如圖二。規定散開程度最小的為優勝。
試盡可能多地用數學方法給出衡量散開程度的標準。（選自日本）
（滿分為 10 分。每給出一種得 2 分。）



A



B



C

圖二