

古法求開方

施禮樑

當討論應否採用母語教學的時候，曾經聽過一位學生發表以下的反對意見：「數學是從西方傳入的知識，用英語來學習，自然比中文好啦！」

聽了這意見，不禁吃了一驚，但細想想，亦很難怪這同學有上述的錯誤想法。一直以來，每當我們提到中國古代的科技成就時，我們祇會講「四大發明」，但當中卻沒有一項是和數學研究有關的！何況在現時的教科書中，亦很少提到這方面的資料。

爲了糾正同學們的錯覺，亦爲了增加他們對學習數學的興趣，於是我就收集了一些與中國古代數學研究有關的資料，在適當的時候引進課堂之中。其中一項覺得最值得向大家介紹的，就是《九章算術》中求開方的方法。

《九章算術》是我國流傳至今較古老的一部數學文獻，由於它內容豐富，而且論述大體正確無誤^(*)，因此一直被中外人士給予極高的評價。書中的第四卷，即是《少廣章》中，就談及到面積、體積的計算問題，因爲其中有一些例題，是從正方形面積去求一邊長長度的題目，所以書中就引出求開方的方法。現在就將書內求開方的原文抄錄如下：

開方 術曰：置積爲實。借一算步之，超一等。議所得，以一乘所借一算爲法，而以除。除已，倍法爲定法。其復除，折法而下。復置借算步之如初，以復議一乘之。所得副，以加定法，以除。以所得副從定法。復除折下如前。

整個計算可以分爲十個步驟，現借助一例向大家解釋：

第一步：置積為實。借一算步之，超一等。

商	
實	427716
法	
借	

整個計算需要四行來書寫，並分別稱為「商」、「實」、「法」和「借」。將需要求開方的數值放於「實」上，然後在「借」行上，由個位數起，每隔一個位放一個記號，以方便之後的計算。

第二步：議所得，以一乘所借一算為法，

商	6
實	427716
法	6
借	

留意「借」行最左邊所標示的數的數值，（即42，）講出一個剛好比它小的平方數，（即36，）並將該平方數的開方記於「商」和「法」的適當位置上。

第三步：而以除。

商	6
實	67716
法	6
借	

將剛才求得的平方數去減「實」行中左方的數值。即
 $42 - 36 = 6$ 。
 （文中的「除」字，不應解作「相除」或「除法」，解作「相減」似較恰當。）

第四步：除已，倍法為定法。

商	6
實	67716
法	12
借	

之後，將「法」行中的數值倍大兩倍。

第五步：其復除，折法而下。

商	6
實	67716
法	12
借	

接著將「法」行中的數值向右移一個位。

第六步：復置借算步之如初，以復議一乘之。

商	65
實	67716
法	12
借	

以除法比較「實」和「法」的兩個數值，定出一個新數字放於「商」。如本例中，因為 $67 \div 12 = 5$ 餘 7，所以將 5 字寫到「商」行。

第七步：所得副，以加法，

商	65
實	67716
法	125
借	

將上述的數字稱為「副」，並且將它寫入「法」行中，放在「借」行的標記的上方。

第八步：以除。

商	65
實	5216
法	125
借	

將「副」乘以「法」行中的數值，並且將結果去減「實」行中左邊的數值。即 $677 - 125 \times 5 = 52$ 。

第九步：以所得副從定法。

商	65
實	5216
法	130
借	

將「副」加「法」。即 $125 + 5 = 130$ 。

第十步：復除折下如前。

商	654
實	5216
法	1304
借	

重覆第五至第九步，直到求出最後結果。即將「法」向右移，求「副」，($521 \div 130 = 4$ 餘 1，「副」設為 4。) 並將「副」同時寫入「商」和「法」行之內。
因為 $1304 \times 4 = 5216$ ，所以本題已完成。
427716 的開方等於 654。

這方法主要利用了一個非常簡單的恒等式來運算。留意：

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 100a^2 + (20a + b)b$$

如果我們需要求 427716 的開方，就先定出 $100a^2$ 中的 a 值；換句話講，就是求一個最接近 4277 的平方數和它的開方。因為 $65^2 = 4225$ ，所以定 $a = 65$ 。代入上面的恒等式得

$$427716 = 100 \times 4225 + (20 \times 65 + b)b \Rightarrow (1300 + b)b = 5216。$$

之後祇要找到一個合適的 b 值，（即是原文中的「副」，詳情可參考第十步，）就大功告成了。

當然，大家會奇怪我們如何得知 a 應選擇65呢？其實好簡單，我們可以依照上述方法，將4277「開方」，（找出一個剛小於42的平方數，即是36，然後再定出一個合適的 b 值，使得 $100 \times 36 + (20 \times 6 + b)b$ 剛小於4277。第二至第八步。）便可以知道 a 應選65了。

大家明瞭這方法的精髓之後，就不難理解原文中「借一算步之，超一等」、「倍法爲定法」、「折法而下」、「所得副，以加定法」等步驟的目的可在；特別一提是第九步：「以所得副從定法」，因爲它是用來定出 $20a$ 的數值的，所以個人覺得如果將它改爲「倍商爲定法」，似乎更易於令人理解這步驟的目的。

最後，要提醒大家的是，第六步和第十步中，利用除法定出來的「副」，可能會過大，到時就要將它減1，（甚至乎要減2！*）才可以順利完成運算。

參考書目

- 白尙恕(譯)(1990)。《九章算術今譯》濟南：山東教育出版社。
 錢寶琮(1964)。《中國數學史》。北京：科學出版社。

*編者按：《九章算術》中亦有錯誤的。例如少廣章第二十四問後的開方圓術便把球體體積誤爲 $\frac{9}{16}$ (直徑)³。這問題到祖沖之父子才能解決。其方法詳見蕭文強「數學教學上如何『古爲今用』」(《抖擻》44期，1981年)一文。

#編者按：也可以減3，例如 $\sqrt{28224}$ ，不過減4就沒有可能了。