活在數學課的憤怒鳥

朱肇濠
可風中學（嗇色園主辦）
張僑平
香港中文大學課程與教學學系

Angry Bird（憤怒鳥）是一個現今智能電話中的熱門遊戲。遊戲的玩法很簡單，就如下圖 1 所示。玩家需要控制力度與角度來將彈弓台上的小鳥彈出，並把右邊小豬擊中。而玩家能夠在小鳥耗盡前（如圖 1 中，連上在彈弓台上的小鳥，共有 4 次機會）把右邊的小豬都擊落的話，玩家就能夠通過這關。遊戲的難度就在於如何能夠控制好力度與角度，以能把小豬都擊中。由於遊戲中並沒有計算空氣阻力等的物理因素，我們可以嘗試用一些數學的方法去預計小鳥的路線並用於數學課堂為樂。假設小鳥離開彈弓台後的路線為拋物線，此即二次方程函數的圖像。所以我們可以嘗試把整個遊戲放進直角坐標中，並以二次函數去估算小鳥的路線。

圖 1

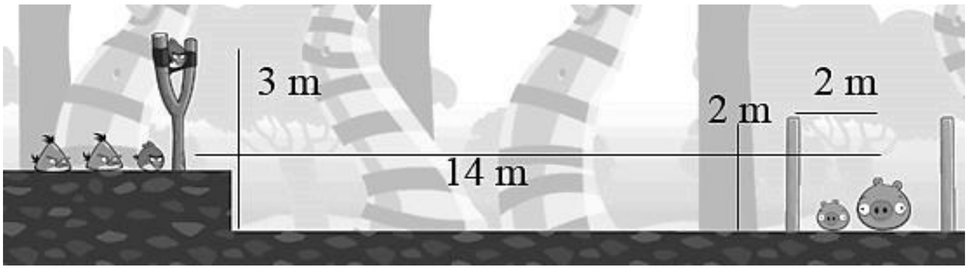

圖 2

就讓我們看看圖 2。在這個場景中，我們有各個物件的具體位置。遊

戲規則是不能以直線打中小豬，若今次我們的目標是較大的小豬，我們不僅要打中它，小鳥的飛行路線還要比那左邊的鐵桿高一點才可。如果我們把直角坐標放進圖 2 以模型去求曲線，可得到圖 3。

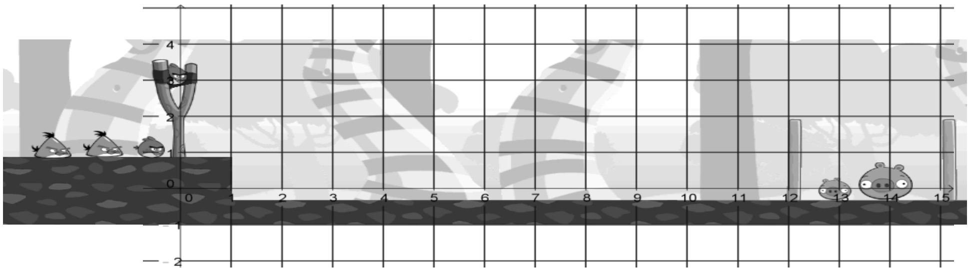

圖 3

從圖 3，我們可以看到小鳥的初始位置是 $A(0\ ,3)$，而目標小豬的位置則是 $B(14\ ,0)$。另外，為了不讓小鳥打中鐵棍，拋物線不可通過 $(12\ ,k)$，其中 $k \le 2$。例如說拋物線通過了 $C(12\ ,3)$。那麼，利用這三點便可得出小鳥的飛行軌跡[6]。

一般二次函數的通式是 $y = ax^2 + bx + c$，根據以上條件，我們可得出：

$$\begin{cases} 3 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 = a(14)^2 + b(14) + c \\ 3 = a(12)^2 + b(12) + c \end{cases}$$

從上式可知 $c = 3$。另外，通過計算，我們可知 $\begin{cases} a = -\dfrac{3}{28} \\ b = \dfrac{9}{7} \\ c = 3 \end{cases}$。故此，如果我們可以說小鳥沿著拋物線 $y = -\dfrac{3}{28}x^2 + \dfrac{9}{7}x + 3$，則順利的擊中小豬。

6 本文中為方便計算，均使用整數點。

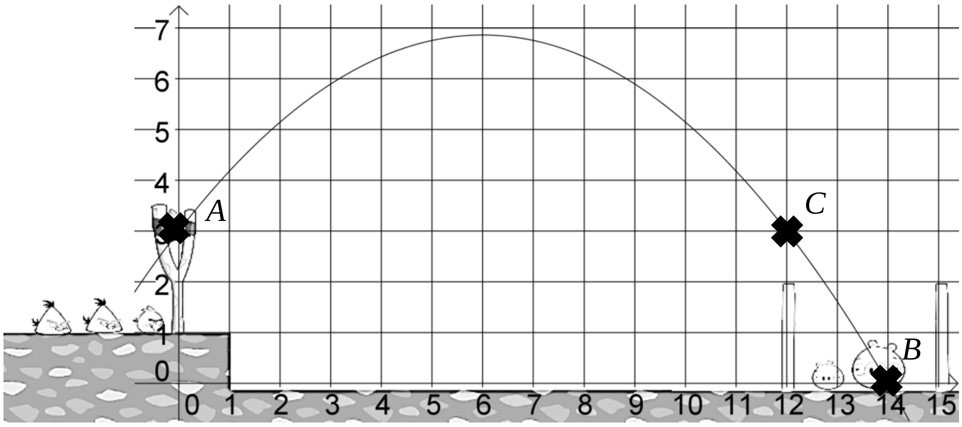

圖 4

另外，可能有同學會問，我們就算得拋物線的模樣，不清楚發射的角度仍然難以應用。所以，我們可以借助微積分的力量，為我們尋求發射角度。

先設 $y=-\frac{3}{28}x^2+\frac{9}{7}x+3$，考慮曲線於 (0 , 3) 的切線斜率，可得出 $y'\big|_{(0,3)}=-\frac{3}{14}(0)+\frac{9}{7}=\frac{9}{7}$。而我們知道若該二次函數的側斜角為 θ，則

$$\tan\theta=\frac{9}{7}$$
$$\theta=52.13°$$

由此得出，只要我們把角度調整為 52.13°，則可達到上圖的拋物線。

讓我們多看一個例子。以下圖 5 是由左邊一隻小鳥打向右邊的小豬。如果今次的目標是最右方眼中有放大鏡的小豬，我們可以再次使用直角坐標系，變為圖 6。

圖 5

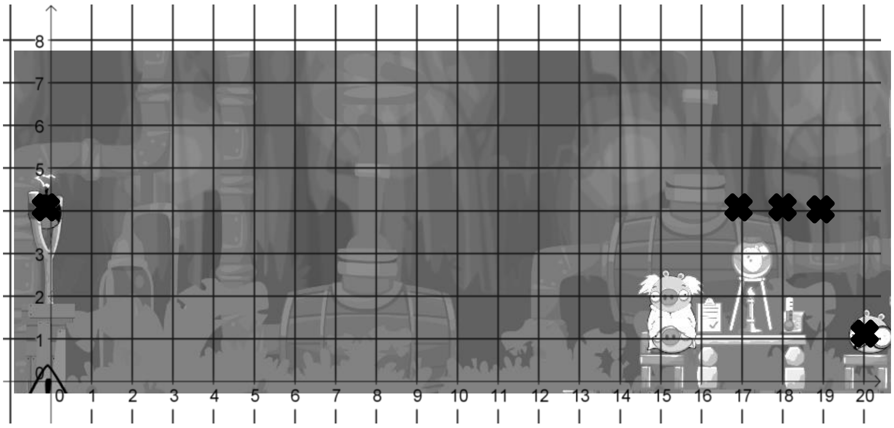

圖 6

我們可見今次的路線是由 $P(0\ ,4)$ 前往 $Q(20\ ,1)$，而為了不碰到中途的障礙，我們最好令該路線會經過 $M(17\ ,4\ )$、$N(18\ ,4)$或 $K(19\ ,4)$ 其中一點。類同上例方法，我們可以得出以下的結果：

個案一：$P(0,4)$, $Q(20,1)$, $M(17,4)$

$$y=-\frac{1}{20}x^2+\frac{17}{20}x+4$$

個案二：$P(0,4)$, $Q(20,1)$, $N(18,4)$

$$y=-\frac{3}{40}x^2+\frac{27}{20}x+4$$

個案三：$P(0,4)$, $Q(20,1)$, $K(19,4)$

$$y=-\frac{3}{20}x^2+\frac{57}{20}x+4$$

由此，我們可見於不同的角度下亦有機會打中目標，見圖 7。

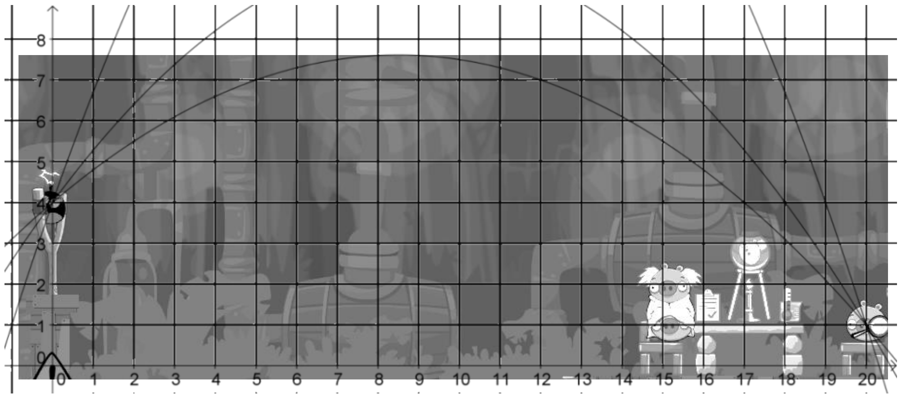

圖 7

除了借助遊戲背景，引入拋物線計算問題外，我們亦可使用憤怒鳥向同學說明關於拋物線頂點的事宜，如下圖 8：

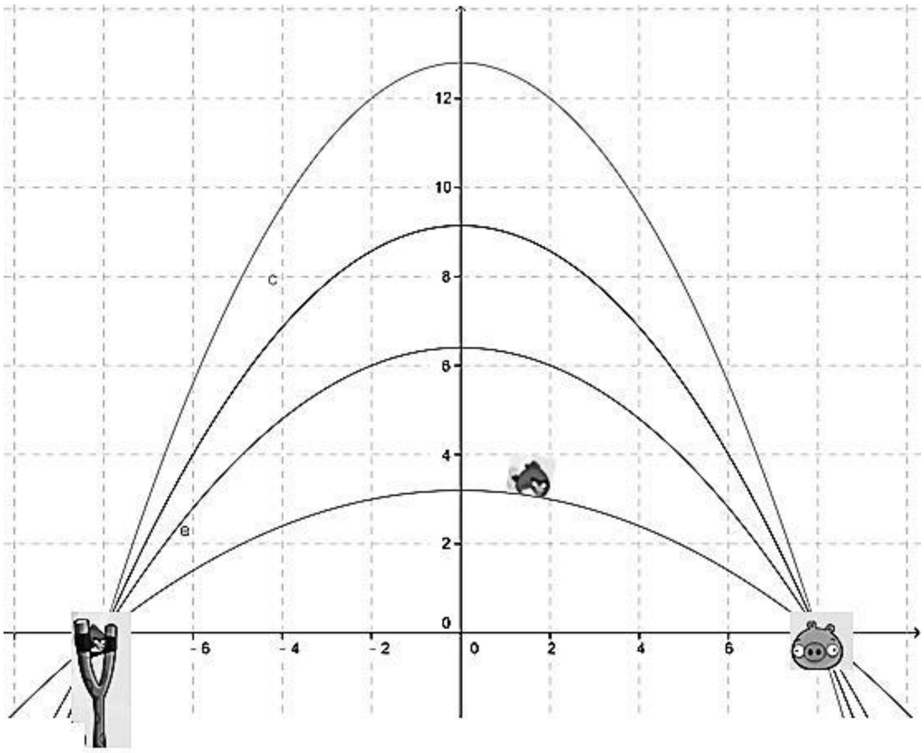

圖 8

由上圖可以得之，如果出發點與擊中點都處於同等水平位置，則頂點的 x 座標是固定，而且是在兩者正中間的。當中的原因，其實則與函數的根有關。

如圖 8 所示，設其中一元二次函數為 $y = f(x)$，則彈弓 $(-8\ ,0)$ 和目標小豬 $(8\ ,\ 0)$ 的位置均是 $y = 0$ 的解。根據二次函數的特質，我們可設 $y = k(x-8)(x+8)$，當中 k 為常數。同時根據函數轉換，k 的大小可影響函數的最大或最小值，但並不影響最大點或最小點的 x 值。故此，我們可知道為何最高點的 x 值並不會隨意移動。所以，在遊戲中，你只要發現你未能擊中目標，亦可以從最高點去細看應如何調節呢！

一元二次函數在中學階段是個重要的課題，涉及因式分解、公式求解、圖像法等諸多不同方法，學生對這個課題的學習經常覺得困難。究竟一元二次函數要學些什麼？仔細分析一下不難發現，除了會建立函數關係，還有就是各種圍繞著 a、b、c 的問題。一些學生往往把精力放在後者，而忽視了前者。即算了一堆關於 a、b、c 的二次函數題，也不知道得出的結果

到底意味著什麼。曾經聽過一個實例，美國一所高中學校搞消防演習，消防員在校園演示完水炮滅火後，跑到教室裡接著給學生講解數學，課題就是二次函數！涉及水炮噴射的角度、高度、消防員的位置和著火點的位置關係等等，學生切身推到了 a、b、c 的意義！在日常數學教學中，受到諸多條件限制，我們固然難以做到實際模擬（其實也是個建模的過程），但如果能夠把學生知道的、經歷的生活例子都放進平日的練習甚或講解當中，同學對數學的興趣自會提高，寓教於樂，不再「憤怒鳥」。

首作者電郵：nelsonchu319@gmail.com