你會怎麼教「畢氏定理」

朱少榮
聖公會鄧肇堅中學退休教師

本人有幸參與香港數學教育學會與香港數理教育學會聯合舉辦之黃毅英教授榮休講座。

講座中段時間，黃毅英教授希望突顯講題內容，加插一個互動活動，要求老師們提議如何教授「畢氏定理」，老師們都踴躍地提出不同方案和論點；隨後黃毅英教授請出兩位老師一起討論，帶出他希望討論的議題（附註 1）。

當時，本人才疏學淺，未能體察黃毅英教授的用意；只出於好奇多事，建議收集老師們提案和論點，希望其他數學老師都可以借鏡。與會老師們非常合作，許多同工都樂意留下他們寫出的方案和論點。本人不才，收集後整理如下（鑑於本人粗疏大意，若詞不達意、掛一漏萬或扭曲原著精神，請老師們不吝指正、賜教和原諒）。

我覺得老師們能在短短十數分鐘，提出教學方向、精髓、重點、內容、流程、注意事項、不同策略、總結、……。可見同工不但教學經驗豐富，知識廣博，策略層出不窮，而且對需要教授的數學內容有深厚認識，熱心教育，深刻反思；屢屢推陳出新，勇於表達教授方案和論點，實在萬千學生之福。

本人心底希望數學兩會以至其他有心人，可以定期舉辦教學集思廣益聚會。令每一個數學課題，每一位老師都可以加深了解內容定位、課題認知；收集不同教學路向、策略、技巧和方案。期盼教師們可以聯手合作，共同進步。

方案（板斧）〈1〉：

1. 鑑定直角三角形中，哪一條是「斜邊」（hypotenuse）？

2. 發現邊長關係

（利用 visualizer 顯示「瑞士糖」數目）

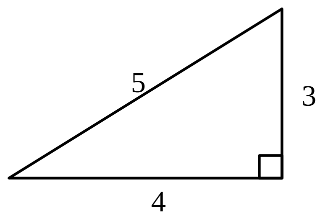
利用不同的“Pythagoras numbers”組別：

3，4，5

5，12，13

7，24，25

……



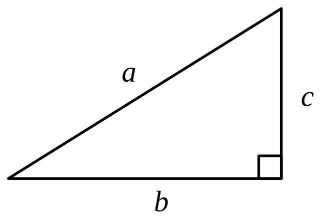
3. 一般地，　$c^2 = a^2 + b^2$ $\rightarrow$ 帶出**「畢氏定理」**。

4. 右圖直角三角形中，哪一個關係才是正確？

(i) $a^2 + b^2 = c^2$

(ii) $a^2 + c^2 = b^2$

(iii) $b^2 + c^2 = a^2$



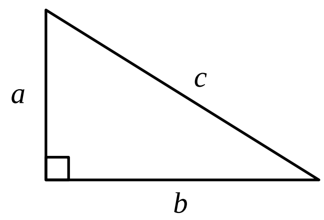
5. 例題（使用不「整齊」的數據），利用直角三角形中其中的兩條邊長度，求出第三條邊長度（即對邊、鄰邊或斜邊）。

6. 提出畢氏定理的逆定理，然後舉例和練習。

方案（板斧）〈2〉：

1. 介紹**「畢氏定理」**。

$c^2 = a^2 + b^2$



2. 利用量尺量度直角三角形中三條邊的邊長，尋找不同數據以作証明。

方案（板斧）〈3〉：

1. A. 介紹**「畢氏定理」**的歷史。
   B. 直角三角形中三條邊的命名。
   C. 如何運用畢氏定理於直角三角形。

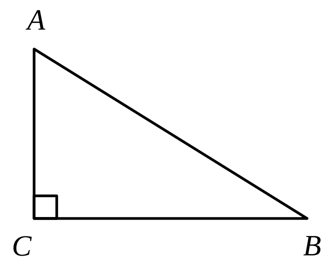
2. 探索直角三角形中三條邊的關係。

3. 推斷畢氏定理中的公式。

4. 計算相關習題以加深認識。

方案（板斧）〈4〉：

1. 如何用一條繩 AB 製作一個直角？



2. 利用（較大格）方格紙繪畫直角三角形，提示同學找出直角三角形中邊長的關係
   → **「畢氏定理」**

方案（板斧）〈5〉：

1. 講故事（畢達哥拉斯 570 BC – 495 BC）以打動學生心靈。
   Pythagoras was an Ionian Greek philosopher, mathematician, and founder of the religious movement called Pythagoreanism. ……

2. 介紹**「畢氏定理」**
   點解咁勁？利用運算活動感受。

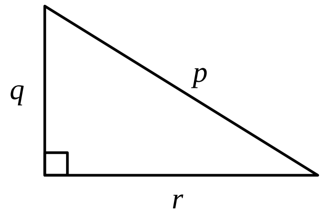
3. 教學

4. 畢氏定理？勾股定理？……
   騙局？……

方案（板斧）〈6〉：

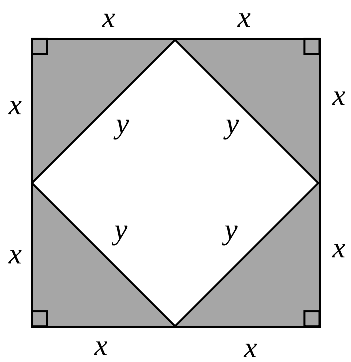
1. Pre-requisite:
   A. Square numbers
   B. Identities $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,etc
   C. Pythagoras Triplet

2. Definition:



   A. Hypotenuse
   i.e. the longest side which is opposite to the right angle of a right-angled triangle.
   B. Square roots of a number
   C. Numbers in “surd” form

3. Discussion:



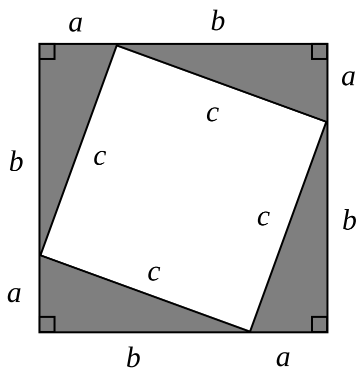
   A. Area of the larger square

$$= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + y^2 = 2x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad (x+x)^2 = 2x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad 4x^2 = 2x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad y^2 = 2x^2$$



   B. In general, area of the larger square

$$= 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

$$\therefore \quad (a+b)^2 = 2ab + c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$$

4. Practice

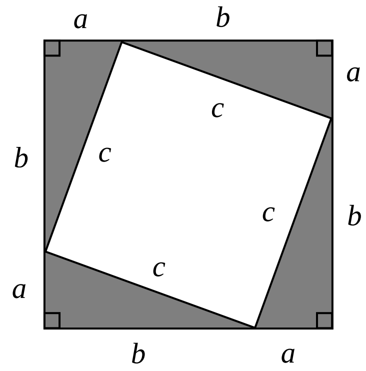
方案（板斧）〈7〉：

1. 重溫「正方形數」、「恆等式」。

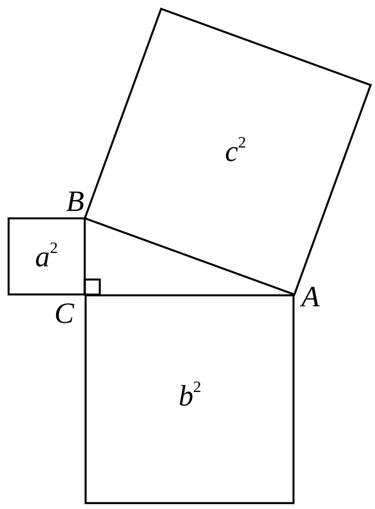
2. 帶入「根號」和「根式」。

3. 分組討論：

   A. 每組給予 4 個「全等直角三角形」，建議利用這 4 個三角形砌出一個正方形！
   （若學生苦無對策，老師便提議改變思維方法，更需要適時作出提示。）
   若有同學想出如右方法，哈哈，
   便可引進以下討論：



   B. 引入討論：
   上圖中的面積，
   4 個直角三角形 + 1 個小正方形
   = 1 個大正方形
   ∴ 4 × （ ？ ）+（ ？ ）= $(a+b)^2$
   ∴ ……
   便可引出 $c^2 = a^2 + b^2$ ！
   正是鼎鼎大名的**「畢氏定理」**。



   C. 派發工作紙。以表格形式的例子，利用畢氏定理計算「已知兩條邊長」的直角三角形中第三條邊邊長，以深化學生對定理的認知。

4. 學生總結。

5. 再看「ETV」，收看歷史介紹和實際或生活化例子的應用。

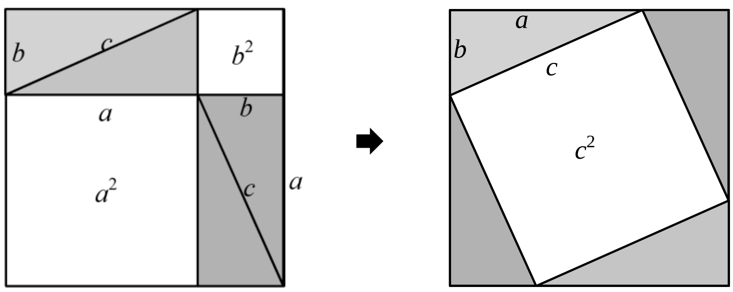
方案（板斧）〈8〉：

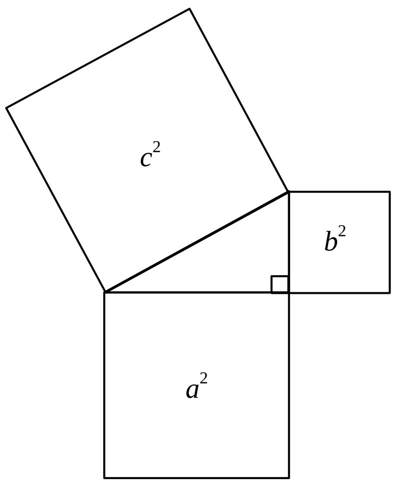
1. 先用「實驗」方法（例如使用軟件）量度不同直角三角形的邊長，然後著學生計算三條邊長的平方，引導學生「發現」 $c^2 = a^2 + b^2$ 。

	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
…	…	…	…	…	…	…	…

2. 指出直角三角形的三條邊長有關係，所以若知其中兩條邊長，便可求得餘下第三條邊長！隨後便做簡易練習。

3. 以活動（動手拼圖）證明**「畢氏定理」**，即 $c^2 = a^2 + b^2$ 。例如：





4. 介紹其他有趣的証明（一至兩個）。

5. 鞏固題 ｜ 挑戰題（例如蘆葦問題）｜ 畢氏定理的歷史。

6. 應用題 ｜ 難題。

<u>方案（板斧）〈9〉：</u>

1. 讓學生探究三角形三條邊長的關係：

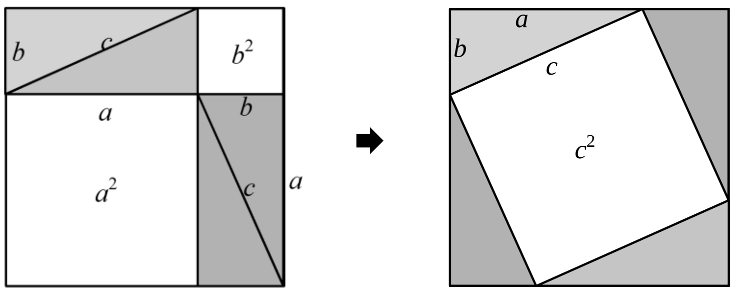
   A. 一般三角形； B. 直角三角形。

	a	b	c	a^2	b^2	c^2	a^2+b^2
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
…	…	…	…	…	…	…	…

引導學生「發現」 $c^2=a^2+b^2$ ➡ **「畢氏定理」**。

2. 指出直角三角形的三條邊長有關係，所以若知其中兩條邊長，便可求得餘下第三條邊長！隨後便做簡易練習。

3. Puzzle



以活動介紹 $a^2+b^2=c^2$

3. History

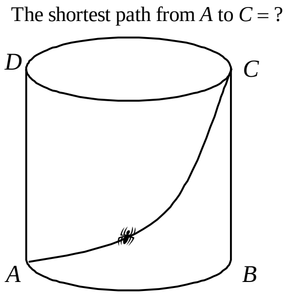
   A. 畢達哥拉斯學派 → 「畢氏定理」。

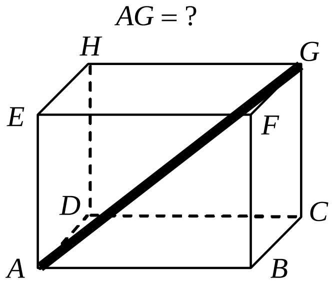
   B. 第一次數學危機。

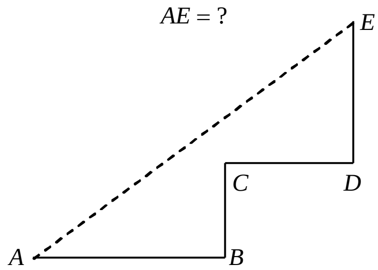
   C. 中國古代的「勾股定理」。

4. Simple calculations: through examples and exercises.

5. Applications：例如，最短路徑問題；可以放入長方體的最長捲軸；……等等問題。







6. Converse of Pythagoras Theorem.

<u>方案（板斧）〈10〉：</u>

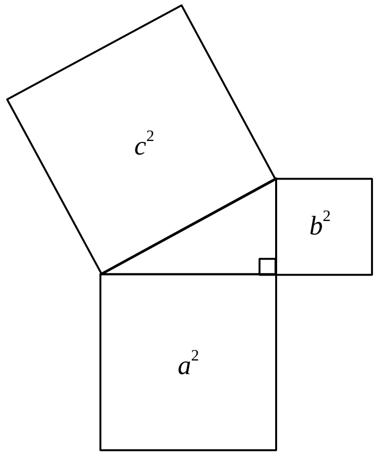
1. 工作紙上畫出 4 至 5 個邊長是整數（cm）的直角三角形。請學生量度邊長（a，b，c），然後從小至大（ $a < b < c$ ）填入表內；再計算表內其他直行數據。

	a	b	c	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							

2. 從上表中猜想 a，b，c 三者的關係，引導學生「發現」 $c^2 = a^2 + b^2$ ➨ **「畢氏定理」**。

3. 再在另一張工作紙上畫出 3 個邊長不是整數（cm）的直角三角形。讓學生再量度邊長 a，b，c，再肯定 $c^2 = a^2 + b^2$ 這個畢氏定理。

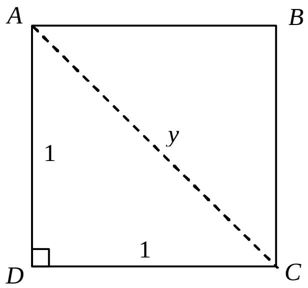
4. 介紹畢氏定理 $c^2 = a^2 + b^2$ 的圖像意義。

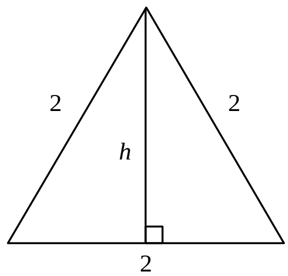


5. 如果時間足夠，證明畢氏定理。
例如：「YouTube」片中「Water Proof」？（「ETV」亦有相關介紹。）

<u>方案（板斧）〈11〉：</u>

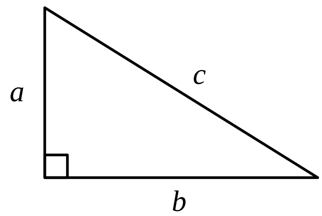
1. 提出兩個具體問題：
Q1. 正方形 $ABCD$ 中， $y = ?$ Q2. $h = ?$





2. 必須了解直角三角形中邊長的關係。

3. 介紹**「畢氏定理」**。
$a^2 + b^2 = c^2$
必須知道：
最長一邊的平方 = 較短兩邊的平方之和



4. 例題、練習、工作紙 → 「操練」

5. 回到證明！

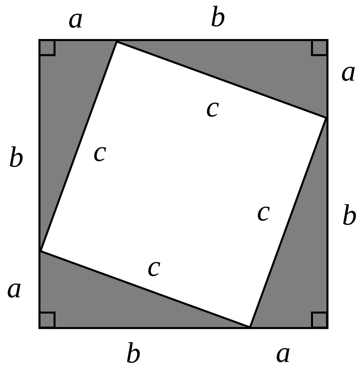
四個全等直角三角形可圍出一個正方形，
其邊長正是直角三角形的斜邊。

$$4\left(\frac{ab}{2}\right)+c^2=2ab+c^2$$

$$\therefore \quad (a+b)^2=2ab+c^2$$

$$\therefore \quad a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

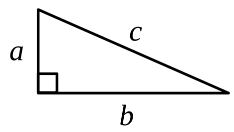
$$\therefore \quad c^2=a^2+b^2$$

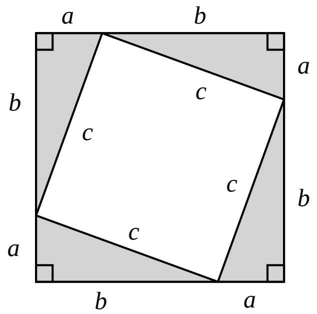


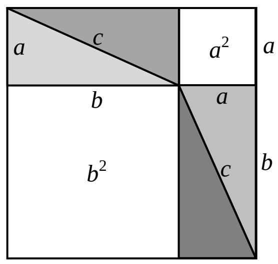
方案（板斧）〈12〉：

1. 探索一種特殊三角形（直角三角形）的三條邊之間關係。

2. 將直角三角形的三條邊長 a，b，c 分別設計成三個正方形的邊長。







$c^2=a^2+b^2$ ➡ **「畢氏定理」**。

3. 在中國，更早發現這個定理 → 現在多稱之為「勾股定理」或「商高定理」。
   簡單介紹一些有關中國古代「勾股定理」的証明方法。

4. 應用：除簡易例題、練習以鞏固畢氏定理的認識和應用，也提及「古算題」、「生活應用題」、「難題」、「變化題」（如 a，b，c 不易發現，或需要多次應用畢氏定理的題目）、「Further Application」、……。

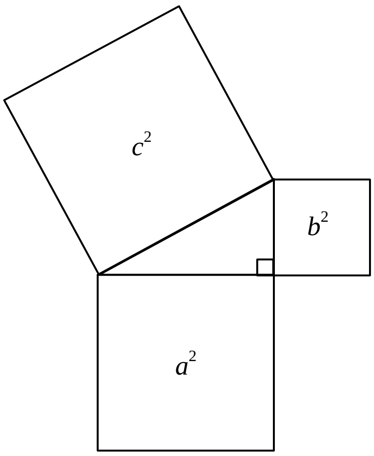
方案（板斧）〈13〉：

1. 在工作紙上畫出多個直角三角形。讓學生量度邊長（a，b，c），然後利用計算表內其他直行數據。尋找 a，b，c 的關係。

	a	b	c	$a+b$	$a-b$	a^2	b^2	c^2	a^2+b^2	a^2-b^2
三角形 1										
三角形 2										
三角形 3										
三角形 4										
三角形 5										
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

2. 從上表中猜想 a，b，c 三者的關係，引導學生「發現」 $c^2 = a^2 + b^2$ ➡ **「畢氏定理」**。

3. 介紹畢氏定理 $c^2 = a^2 + b^2$ 的圖像意義。



（特殊情況： 3，4，5 和其他整數例子）

4. 其他証明。

5. Model making。

方案（板斧）〈14〉：

0. Pose a situation of finding the length of the longest side (should be discussed before) of a right-angled triangle with the lengths of two other given sides to your students.

1. Students are asked to draw a right-angled triangle on a graph paper in a worksheet with grid-lines 1 cm apart (i.e. squares with dimensions 1 cm × 1 cm).

2. They will then be asked to measure the lengths of the three sides a , b and c (the length of the longest side), and put the corresponding values in a table in the worksheet.

   Same procedures will be repeated for more different triangles.

	a	b	c	$a+b$	$a-b$	a^2	b^2	c^2	a^2+b^2	a^2-b^2
Triangle 1										
Triangle 2										
Triangle 3										
Triangle 4										
Triangle 5										
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

   If possible, more columns such as a^3 , b^3 , c^3 , $a^3 + b^3$, etc. will also be considered.

3. Guess the relationship(s) among the three sides of a right-angled triangle by completing the above table in the worksheet given or on a spreadsheet.

4. Some students may find out the correct relationship, i.e. $c^2 = a^2 + b^2$. If not, clues from the teacher might be required.

   Thus, the “Pythagoras Theorem” will be introduced.

5. More applications through examples and class-work will be given.

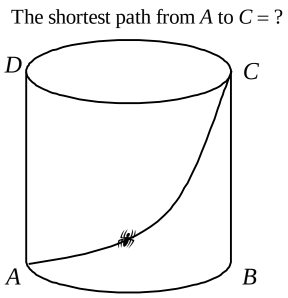
6. Exploring the visual proofs of Pythagoras Theorem through interactive activities among students and teachers by using “iPad”.

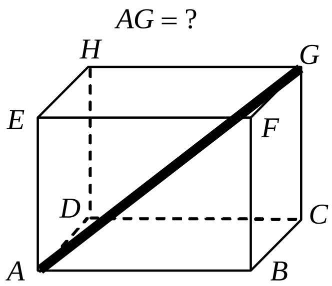
7. History of Pythagoras Theorem, 勾股定理 and applications of Pythagoras Theorem in real or daily-life problems will then be introduced (probably by watching "ETV" or using relevant support).

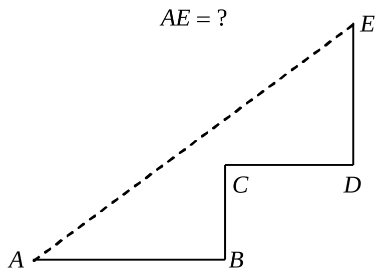
8. "How to determine whether a triangle is right-angled or not ?"
The brief concept of the converse of Pythagoras Theorem (proved by "contradiction") will then be discussed and concluded.

9. More practice about Pythagoras Theorem and its converse will be given again.
Finally,……

10. Introduction of "enrichment" problems, such as
    A. The "shortest path" problems (such as the path of an ant on a rectangular block, cone or cylinder; the longest rod that can be placed in a rectangular box; the shortest distance of a zigzag path; etc.)



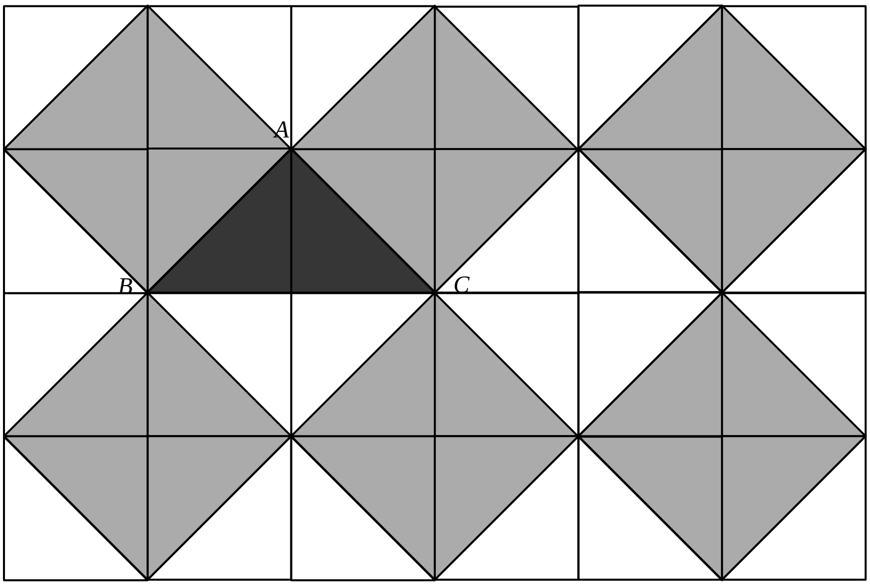




    B. "Are there any integral values of a , b and c such that
    $a^3 + b^3 = c^3$?"
    $\rightarrow$ In general, can we have integral values of a , b and c such that
    $a^n + b^n = c^n$?
    $\rightarrow$ The introduction of "Fermat's Last Theorem".

方案（板斧）〈15〉：

1. 全班分組（約 4 人一組），每組每人分發工作紙（內附印有「全等等腰直角三角形」圖案地板）一張如下：



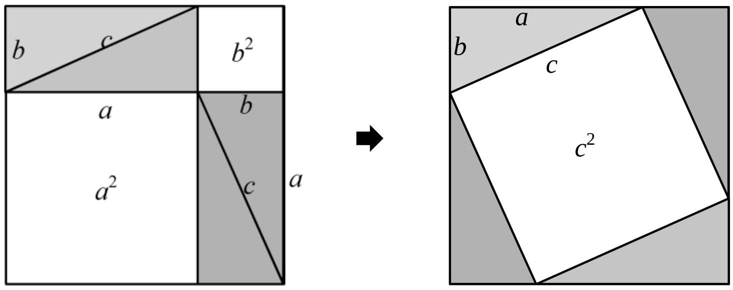
A. 學生一起探討圖形上面積的關係。
B. 提示學生可以聚焦於等腰直角三角形 ABC 之上。
C. 若學生苦無對策，便需引導他們在等腰直角三角形 ABC 的邊線上「正方形」面積的關係。
D. 在這特殊情況下，學生最後總會被引導出關係 $BC^2 = AB^2 + AC^2$。

2. 再派發工作紙研究於不同的三角形中邊線上正方形面積的關係（至此，三角形邊線上正方形的面積只需要利用「計算機」算出）：
A. 等腰三角形
B. 等邊三角形
C. 一般（沒有直角）三角形
D. 一般直角三角形（只有這種情況才會有 $c^2 = a^2 + b^2$）

從而帶出鼎鼎大名的**「畢氏定理」**。

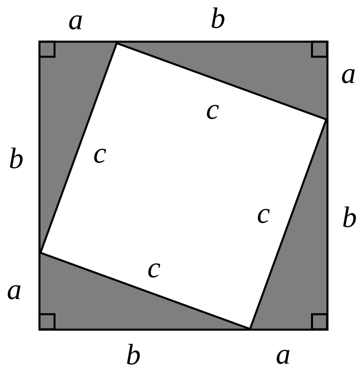
3. 以活動（砌圖遊戲）引領同學一起證明畢氏定理。例子如下：

例一（利用自製教具）：



例二（配合代數的証明）：

四個全等直角三角形可圍出一個正方形，其邊長正是直角三角形的斜邊。



$$4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

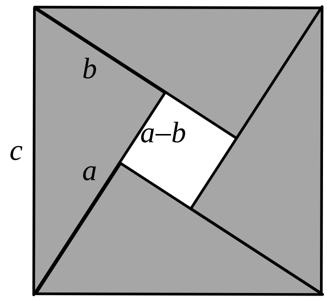
$\therefore \quad (a+b)^2 = 2ab + c^2$

$\therefore \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$

例三（配合代數的証明）：

圖中，四個全等直角三角形圍出邊長是 c 的正方形，而中央部份則是另一個邊長是 $(a-b)$ 的小正方形。



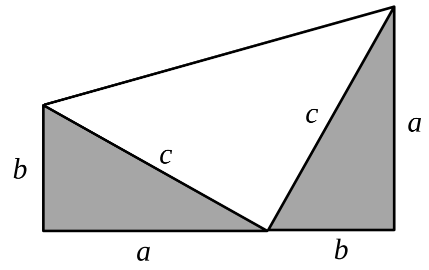
$$c^2 - 4\left(\frac{ab}{2}\right) = (a-b)^2$$

$\therefore \quad c^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$

$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$

例四（配合代數的証明）：

兩個全等直角三角形可圍出一梯形，
中央部份是一個等腰直角三角形。



$$2\left(\frac{ab}{2}\right)+\frac{1}{2}c^2=\frac{(a+b)(a+b)}{2}$$

∴ $$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$$

∴ $$c^2=a^2+b^2$$

4. 派發工作紙：
以表格形式的例子，利用畢氏定理在「已知兩條邊長」的直角三角形中計算第三條邊邊長，以深化學生對定理的認知。

5. 強化練習（包括簡易練習、難題、綜合練習、生活化應用題、「最短路線」問題、……）。

6. 再看「ETV」，收看歷史介紹和實際或生活化例子的應用。（附註 2）

7. 介紹相關定理 → 畢氏定理的逆定理，再舉例、練習和應用。

附註：

1. 當日，我估計（如果理解錯誤，請原諒）黃毅英教授是希望與會老師們利用「5W2H」、「5W1H」、……的方法審視自己具備的教學方案（板斧）和應用。
   - A. What： 在教授這個課題上，你有甚麼「板斧」？
   - B. How many： 你有多少道「板斧」？足夠嗎？
   - C. Who： 你的對象是哪一類學生？適合嗎？若是當你選取的「板斧」失效，你還有沒有其他「板斧」？哪一道「板斧」適合補上？
   - D. Where： 你在哪裡教授這個課題，是在課室中？還是跑出課室外?
   - E. When： 你應該在哪一個年級、哪一個時間教授這個課題？可以在哪些課題之前或之後教授？若未能如你所願，你又如何改選其他「板斧」？
   - F. Why： 為甚麼你決定選用這一道「板斧」？有沒有其他更適合的「板斧」？

G. How：　　　如何執行？若其中有變，你又如何「執生」應變？

所以教師身上「板斧」越多，他們教學成功的機會越大！

那麼，我之前的提議（方案研討）是否對教師們更有利和有效？

2. 這裡看到很多方案都推薦利用「ETV」，收看歷史介紹和實際或生活化例子的應用。可見在這課題中，「ETV」是一個教師們都非常欣賞的應用「軟件」。

還有網上流傳許多介紹「畢氏定理」，相關的証明和應用。教師們只要用心嘛，自然會有很多得著！衷心希望同道者更上一層樓。

作者電郵：chusw2005@yahoo.com.hk