小學數學，為甚麼（不可以）是這樣的？

馮振業
香港教育學院數學與資訊科技學系
張淑芳
寶血會培靈學校

引言

小學生上數學課，總聽到老師說：「記著，……」，要記的東西可真不少。可能匆忙的學校生活，令誰也不習慣停下來想想，爲甚麼要記著。作爲受過專科訓練的數學教師，應準備面對學生（甚至家長）的查詢：「爲甚麼…（不可以）是這樣的？」本文嘗試列舉一些碰過的例子，看看該如何回應類似的問題，並嘗試把數學課之上，被認爲是真確的話語分類。

由耳熟能詳的問題說起

從教師口中，聽過不少不易在書本中找到答案的問題。以下是其中一些反覆出現的例子，及可供參考的分析和回應：

例 1

上午 9 時 17 分，以 12 小時報時制寫出，爲甚麼不可以是「09:17 a.m.」？

依課程指引，時間教學分佈於一至三年級（香港課程發展議會，2000）。二年級學了十二小時報時制，就懂得用「9:17 a.m.」代表「上午九時十七分」。及至三年級，學了二十四小時報時制之後，就懂得用「09:17」代表「上午九時十七分」。明顯地，「09:17 a.m.」就是學生把兩種寫法混在一起，當作十二小時報時制的寫法的結果。很多時候，教師在評改時，只接受答案是(i) 9:17 a.m.，不接受(ii) 09:17 a.m.，認爲以十二小時報時制報時，前端的「0」應該略去不寫。

如果從生活應用角度考慮，只要生活上碰到的用法，除非帶來嚴重混淆，否則都應該接受。隨便在互聯網上，就可找到沒有略去前端的「0」的十二小時報時制例子（圖一、圖二），說明確實存在這樣的生活應用。如果從數學表達角度考慮，最重要是能準確地傳意，沒有歧義。看到

「09:17 a.m.」，除了可以理解爲「上午九時十七分」，壓根兒沒有其他合理的理解，傳意清楚準確，歧義顯然並不存在。綜合兩種看法，寫「09:17 a.m.」可說是不夠簡潔，多寫了一個不必要的「0」，極其量只能算笨，不能算錯。

圖一　　　　　　　　圖二

（圖一：下載自http://i1-handheld.softpedia-static.com/images/software/screens/Real-Digital-Clock_1.jpg）

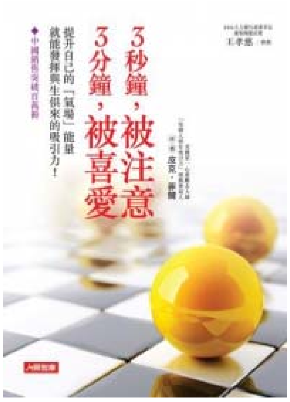
（圖二：下載自 http://flashtuts.s3.amazonaws.com/079_DigitalClock/Tutorial/clock_in_flash5.jpg）

例 2

應寫「時間過了 7 分鐘 36 秒」，還是「時間過了 7 分 36 秒」？

不少教師認爲：「分」是用來報時的，而「分鐘」則是用來表達時距。正如前例的分析，考慮數理最重要是準確表達和沒有歧義，這兒兩種表達都指向同一理解，沒有爭議的空間。再看生活，表達時距卻真的是並不統一。在以單一單位表達時距的情況下，不只「分」之後可以加上「鐘」字變成「分鐘」，就是「秒」之後也可以加上「鐘」字變成「秒鐘」，這種用法曾經同時出現在翻譯作品的書名之上（圖三）。實際應用上，「分」和「分鐘」甚至可以交替地出現在同一章課文（見孫、王，2007，頁 88-93）或同一篇文章（見鍾，1994）之內。同樣地，「秒」和「秒鐘」也可以交替地出現在同一份文件（見香港籃球總會裁判委員會，2010）之內。換言之，生活上確實存在以下幾種表達方式：「時間過了 7 分」;「時間過了 7 分鐘」;「時間過了 36 秒」;「時間過了 36 秒鐘」。剩下要考慮的，是同時運用這兩個單位表達時距的情況。在表達運動比賽成績時，最常見的用法是「7 分 36 秒」見 http://www.sportsnote.com.tw/running/view_article.aspx?id=b388f66c-3062-4119-b2ad-ac731fed0b44，至於「7 分鐘 36 秒」，就只在全港性系統評估的考題（圖四）碰過。至於「7 分 36 秒鐘」和「7 分鐘 36 秒鐘」，都是

不曾碰過的表達方法。撇開上述考題的獨特用法不談，生活上同時應用「分」和「秒」報告時距的用法比較一致，都是用「X 分 Y 秒」的形式，教學時應令學生注意，不像在單名數時，有「鐘」沒「鐘」均可。



圖三

28. 以下是跑步比賽首四名運動員完成比賽所需的時間。

名次	運動員	所需時間
1	張小金	7 分鐘 17 秒
2	黃國強	7 分鐘 36 秒
3	李子傑	8 分鐘 37 秒
4	何卓仁	9 分鐘 0 秒

(a) 第一名比第二名快 ________ 秒。

(b) 跑步比賽在下午二時開始，用「24 小時報時制」表示，何卓仁在 ________ : ________ 完成比賽。

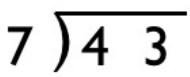
圖四

（圖三：下載自
http://www.books.com.tw/exep/prod/booksfile.php?item=0010552424）

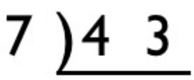
（圖四，2013-3MC3-28：下載自 www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2013priPaper/P3Math/TSA2013_3MC3.pdf）

例 3

長除號和短除號，只可以是圖五和圖六的樣子，不能像圖七和圖八的樣子嗎？爲甚麼？



圖五



圖六

圖七

圖八

不論是長除式或短除式，目的都是輔助計算，當中都會寫出被除數、除數、商和餘數。在長除式上，更會記錄分步計算時，每步分去的數量及剩下還未分的數量。可是，如何把這些元素記錄，卻存在多種方式，主要由人的習慣和喜好決定。不止被除數和除數之間的分隔線曲直不區，就是商，也沒必要一定放在長除式的被除數的上方。在一百年前，就曾流行把商放在被除數的右方的長除式寫法（圖九）。因此，不應對除式的外觀作出過分僵化的要求，著眼點應放在表達方式是否有助計算。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
633) & 79125\ (125 \\
& \underline{633} \\
& 1582 \\
& \underline{1266} \\
& 3165 \\
& \underline{3165} \\
& 0
\end{array}
$$

圖九（取自 De Morgan，1910，頁 19）

例 4

平均分一堆物件，爲甚麼不可以一口氣分多於 1 件？

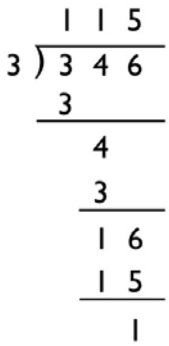
平均分只要求最終分物的結果滿足每份數量相同，卻沒有指定分的過程。每次只分每份 1 件的好處，是可以減低不夠分導致要從每份取回的機會。另一項更重要的作用，是可以把整個過程與口誦乘法表更好地對應起來，對教授實作分物過渡至除法直式的符號計算有莫大幫助。例如糖 50 粒，平均分給 7 人，實作分物與口誦乘法表，就可如表一般對應起來。當然，明白當中數理的人，也可口誦「七三二十一，七七四十九」，從而算得答案。這樣對應的，就是第一次分 3 粒，第二次分 4 粒（與第一次合起來共分去 7 粒）的分物過程。

實作分物描述	口誦乘法表
7 人分糖，當每人分得 1 粒時，共分去 7 粒。	七一如七
7 人分糖，當每人分得 2 粒時，共分去 14 粒。	七二一十四
7 人分糖，當每人分得 3 粒時，共分去 21 粒。	七三二十一
7 人分糖，當每人分得 4 粒時，共分去 28 粒。	七四二十八
7 人分糖，當每人分得 5 粒時，共分去 35 粒。	七五三十五
7 人分糖，當每人分得 6 粒時，共分去 42 粒。	七六四十二
7 人分糖，當每人分得 7 粒時，共分去 49 粒。	七七四十九

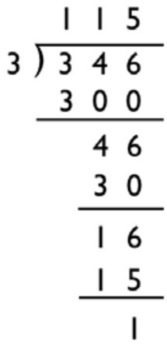
表 一

例 5

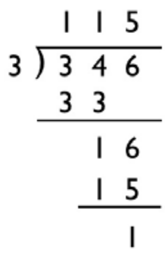
以直式計算 346 ÷ 3，一定要像圖十那樣計算嗎？爲甚麼不可以像圖十一或圖十二的樣子計算？



圖十



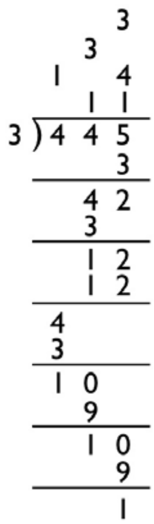
圖十一



圖十二

前文提及，處理長除式不宜對其外觀作過於僵化的要求，應注意它如何輔助計算。以上三種做法，皆對應實質可行的計算過程：圖十強調每個數位都會獨立地使用一橫行進行減法計算；圖十一著重把每一步分去的數量及剩下未分的數量，毫無省略地顯示；圖十二則重視壓縮書寫量，強調只要該步計算不衍生退位，下一步即可在同一橫行上繼續計算（黃，2011）。最近有證據顯示，不論能力較高或能力稍遜的學生，都喜歡圖十二的做法（蔡，2013）。

按同樣的思路，也可得出「進行三位數除法的直式計算，不一定要先計算百位」的結論。對很多教師而言，像圖十三的計算過程（見馮，1999）是匪夷所思的。這樣做會令計算步驟增加，雖不算錯，但肯定較爲笨拙。



圖十三

例 6

乘式中，被乘數爲甚麼一定要先寫？

先寫被乘數只是一種教學約定，並非數學本身。事實上，先寫乘數亦無不可，不與任何數理相悖。一般教師會要求初學乘法的學生能清楚區分被乘數和乘數兩個概念，遂出現在乘式中先寫被乘數的教學約定。然而，當乘法交換性質出現，先寫後寫都變得無關重要。要確定學生能否區分被乘數和乘數，不能簡單地看哪個數先寫，詳見鍾、馮（2013），此處從略。

例 7

解方程時，爲甚麼等號都要對齊？

解方程時對齊等號，只是一種表達方式的建議，旨在幫助學生小心計算，沒有做不能算錯，甚至不能被視爲表達方式欠佳。不少教師有這樣的要求，很可能是爲了批改方便。

例 8

3 的 y 倍，一定要寫作 $3y$ 嗎？爲甚麼不可以寫作 $3 \times y$？

從算術走向代數，中間存在一段過渡時期。高小學生初次接觸代數，正處於算術和代數表達方式並行的尷尬時刻。「$3 \times y$」是把代數符號放進算術表達方式的寫法，簡單地把「3×5」的「5」換成「y」即可。相反地，「$3y$」中的乘號被完全隱藏，是徹頭徹尾的代數表達方式。它偏離了算術中，運算符號都要清楚地顯示的慣例，部分學生或會未及適應，自然地傾向保留乘號，實屬過渡期的合理反應。既然傳意上不曾引來誤解，評改時不宜過於嚴苛。

例 9

工人上午鋪了電線 30 米，下午再鋪了電線 y 米，全日共鋪了電線（$30 + y$）米，爲甚麼不可以寫作 $30 + y$ 米？每名工人一天可鋪電線 x 米，30 名工人一天可鋪電線 $30x$ 米，爲甚麼又不必寫作（$30x$）米？

代數符號只代表一個數值，不包括任何單位。在加、減、乘、除的代數式中，代數符號的寫法與一個確定的數（稱爲常數）並無分別。要爲由

若干個數相加而得的代數式添上單位，必須把代數式放在括號之內，然後在後面加上單位，如「（$30+y$）米」，即「30 米 $+\ y$ 米」。若寫「$30+y$ 米」，前面的「30」便成爲一個沒有單位的數，不能與以「米」爲單位的「y」相加。相反地，在由若干個數相乘而得的代數式中，例如「$30\,x$」，即使把寫在後面的「米」當作只屬於「x」，將「x 米」與沒有單位的「30」相乘，所得的結果跟「（$30\,x$）米」完全一樣，故知括號寫與不寫並無分別，追求簡單的人自然不寫。當然，寫了亦絕對正確。

例 **10**

以直式計算 0.45 + 3.6 時，爲甚麼一定要在「6」的右方補「0」（圖十四）？

補「0」的作用在於提醒計算者 3.6 的百分位數字是「0」，只要計算者能按位值把數字對齊，知道沒有數字的百分位即有 0 個百分之一，即使沒有補「0」，同樣可以正確地計算。

$$\begin{array}{r} 0.45 \\ +\ 3.60 \\ \hline 4.05 \end{array}$$

圖十四

例 **11**

計算 132 + 59 + 46 時，可用圖十五的直式一次過完成計算，爲甚麼計算 132 − 59 − 46 時，卻不能如圖十六般，一次過完成計算？

$$\begin{array}{r} 132 \\ 59 \\ +\quad 46 \\ \hline 237 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 132 \\ 59 \\ -\quad 46 \\ \hline 27 \end{array}$$

圖十五　　　　圖十六

圖十五和圖十六都沒有任何計算過程留下的痕跡，實質上只有答案，與純寫橫式毫無分別。如果圖十五可以接受，不接受圖十六就欠缺說服力

了。直式作爲計算的工具，應有它在計算過程中扮演的角色。在進行連加計算時，計算者逐一心算各數位上所有數字及可能有的進位的和，然後把屬於原位的數字記在同欄的橫線之下，再把進位注記於左方一欄的橫線之上。完成計算後得到的直式（圖十七），會留下注記進位的痕跡，與圖十五不盡相同。

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ 5\,9 \\ +\quad {}_{1}4\,{}_{1}6 \\ \hline 2\,3\,7 \end{array}$$

圖十七

要用直式一次過完成 132 − 59 – 46 的計算，恐怕要比連加的情況複雜得多。不論是先算 132 – 59 還是（59 + 46），在直式上表達都容易引起混亂，更何況單看直式也不清楚計算者到底選用了哪種計算過程。因此，一般不會建議一條直式計算連減。能這樣做又不會算錯的，大概心算都能得出正確答案，屬於不必借助直式的一小撮人。

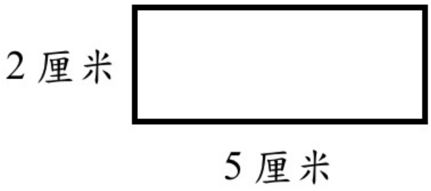
例 **12**

653 004 963 應讀作「六億五千三百萬零四千九百六十三」，還是讀作「六億五千三百萬四千九百六十三」？

多位數的讀法嚴格來說不是數學本身，在歷史上也不見得有統一的做法。其中主要的分歧，在於「0」的讀法（馮，2002）。近幾十年，中國大陸出現了一種統一的讀法，跟從的話，每個多位數就只有一種讀法。這種多位數讀法見於顧等（1995），篇幅所限，此處從略。依這種讀法，上述多位數應讀作「六億五千三百萬四千九百六十三」，而非「六億五千三百萬零四千九百六十三」。

例 13

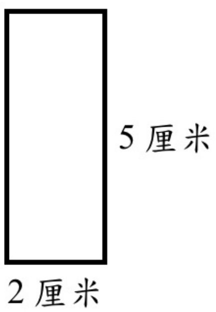
圖十八的長方形，爲甚麼「長」一定是 5 厘米，不可以是 2 厘米？



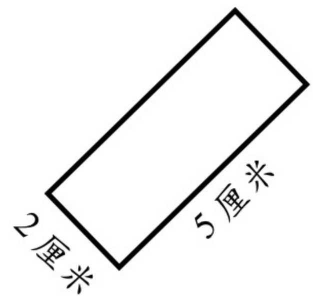
圖十八

要解答這個問題，必先確定「長」的意思。部分教師在介紹長方形的周界或面積公式時，總會寫出「（長 ＋ 闊）× 2」或「長 × 闊」，當中「長」是指橫放的一邊，「闊」是指縱放的一邊。且不去爭論爲何不把橫放的一邊叫「闊」，按此定義，圖十八的長方形的「長」就一定是 5 厘米。當長方形轉了一個直角成爲圖十九的樣子，按此定義「長」就是 2 厘米了。同一個長方形，不同的擺放方向，竟然衍生「長」的兩種截然不同的理解，加上在斜放的時候（圖二十），更是毫無合理的說法，全然未能滿足傳意的基本要求。遇上這種情況，「長」便不能成爲一個良定義（well-defined）的概念，因未能賦予它一個確切的意思。

爲了避過上述混亂，部分教師會以較長的一邊作「長」，較短的一邊作「闊」。不管是圖十八、圖十九或圖二十，長方形的「長」同樣是 5 厘米，掃除了所有含糊的地方，使「長」和「闊」得以成爲良定義的概念。不過，這樣的定義在使用上仍有其不足之處。例如，在不清楚長方形的一邊是否較長的時候，就出現不知可以怎樣稱呼的情況。假設教師正在請學生從袋中抽出數卡，代表長方形的邊長，貼在展示板上的適當位置（表二），然後請全班學生一起計算周界和面積，抽出第一個數的，將因爲不確知它是否較下一個抽出的數大而無法張貼。



圖十九



圖二十

長方形	長 （厘米）	闊 （厘米）	周界 （厘米）	面積 （平方厘米）
A				
B				
C				
D				
E				

表二

其實在長方形周界和面積公式之中，「長」和「闊」只是長方形兩條鄰邊的代號，使周界、面積與邊長的關係可以用簡單算式表示。由於它們在兩條公式中的地位對等（或更準確地說：「長方形周界和面積都是「長」和「闊」的對稱多項式」），把「長」和「闊」的理解倒轉，並不影響公式的真確性。因此，如果花九牛二虎之力釐清「長」和「闊」的意思，只是爲了正確使用兩條公式，肯定就是浪費功夫。要迴避區分「長」和「闊」的需要，可以乾脆把兩條公式重寫成：「長方形周界 = 長方形兩鄰邊之和 ×2」和「長方形面積 = 長方形兩鄰邊之積」。誠然，這樣表達的公式欠缺具體的邊長，抽象性較高，較適合中學生，小學生或會感到較難理解。另一種方法，就是以「長」和「闊」分別代表長方形的兩條鄰邊，任何一邊都可以被稱爲「長」，一旦定了，它的鄰邊就叫「闊」。這樣做使「長」和「闊」變成爲方便溝通的隨緣約定，而非確切的、可廣泛地應用的數學概念。

例 **14**

已知白色手工紙有 120 張，黑色手工紙比白色的多 60 張，未學括號的學生求共有手工紙幾張，爲甚麼一定要列算式 120 + 60 + 120？爲甚麼不可以列算式 60 + 120 + 120 或 120 + 120 + 60 計算？

一般應用題，不會指定求解的步驟，學生可以運用任何習得的數學知識，以任何合理的方法解題。由於先求黑色手工紙的數量並非問題的要求，解題者大可隨意選用上面任何一道算式計算。即使學了括號，加與不加全然不影響計算結果。學生不加固然不能作錯，即使寫下 60 +（120 + 120）這個很多教師不願接受的算式，也只能反映計算過程不同而已。若被視作錯誤，恐怕不能以理服人。如果擬題者希望知道解題者是否懂得計算黑色手工紙的數量，就應該把問題分成兩部分：先求黑色手工紙的數量，然後再算共有多少。

例 15

解除法應用題時，爲甚麼要寫答句？爲甚麼不可以寫題解？

回答應用題，跟回答其他問題一樣，最重要是能清楚表達，而不是硬套某種表達形式。考慮以下一題及學生甲、乙的解答：

[題 A] 蛋糕 13 件，每 3 件一盒，最多可分成幾盒？餘下幾件？

學生甲的解答：
最多可分成：

  13 ÷ 3
 = 4（盒）…1（件）

學生乙的解答：

  13 ÷ 3
 = 4（盒）…1（件）
最多可分成 4 盒，餘下 1 件。

學生甲的解答用題解，「最多可分成」之後寫下除式，其等號右方出現「4（盒）」和「1（件）」。到底是「最多可分成 4（盒）」，抑或「最多可分成 1（件）」？餘下又是多少件？這樣的寫法，要讀者自行找出所需，不能算是最好的表達方法。如果把問題改成[題 B]，學生甲的解答也許會列出與之前完全相同的除式，而題解卻改爲「最少要盒」。可是，答案全部都不在算式中出現，不加插其他解說，回答絕不完整。

[題 B] 蛋糕 13 件，每個盒可放 3 件，最少要盒幾個才可全放所有蛋糕？餘下的空間可再多放蛋糕幾件？

反觀學生乙的解答，在除式後加入答句，問甚麼就答甚麼，不論是[題 A]或[題 B]，都全無含糊誤會的可能，表達方法肯定較學生甲的解答優勝。值得商榷的是，單位只在除式右方出現的寫法，儘管只存在於括號之中，卻與等號兩方的單位理應可以合理地對應的期望相違。選擇寫答句的話，除式中的單位大可全部略去。

生活應用的做法

數學與它的生活應用不同，前者雖不一定舉世劃一，但至少不會自相矛盾；後者卻可以五花八門，有時只見習慣的用法，卻不清楚原因，矛盾和混淆有時亦會出現（例 1）。因此，講解數學的生活應用，重點應放在常見的用法是否有違準確傳意的要求。只要學生能覺察混淆的來源，並能有效迴避，教師實不必花過多功夫統一課室內的生活應用（例 2），否則只會減少用於研習重要數學內容的時間。

數學的表達方法

很多被廣泛採用的數學表達方法，或多或少都可究其原因。然而，這並不表示存在唯一正確的表達數學的方法（例 3、6、7、8、14）。表達數學也可算是寫作的一種，較不同的地方，在於數學的嚴謹特質及其豐富的內在邏輯，令人可以輕易指出某些表達的不足之處（例 9、15）；從而分對錯（例 9、10）、判高下（例 15）。教學時，除了介紹一些較佳的、容易理解的表達方法（例 8、9、15），讓學生模仿之外，也應提供評比不同表達方法的機會（例 7、8、10、14、15）。使學生學會分對錯、判高下，建立自我評鑑的能力。

數學概念的意義

數學概念是一種思維產物，例如「平均分」（例 4）、「被乘數」和「乘數」（例 6）、「周界」和「面積」（例 13），來自抽取事物、經驗或活動的特質，通常不存在於現實世界。它的重要性，取決於它的應用有多廣泛或可引申出多少數學關係。數學概念通常有一個名稱，有時也有專用的符號或簡記，而它的精確描述就稱爲定義。教授一個概念時，除了要使用適當的例子和非例子，讓學生捉緊概念的意義之外，也要探討這個概念如何影響

人們思考、溝通和做事的方法。例 13 探討有關「長」和「闊」的不同理解及其影響，就是一個例子。

一套程序的步驟

程序是指一套用以完成某一特定類別任務的機械化工序，它不因任務的具體情況而有所變化，執行的人無需作出判斷或決策，是一種成熟的智性產物。例 5 列舉了三種不同的除法計算程序，而例 11 提及的，就是三個數連加的計算程序。數學課之上，會介紹不少程序，並要求學生能純熟地執行。

數學課的說話

單看上述 15 個例子，即使不理會其中的分析，也必然衍生很多可能會在數學課上出現的說話，以下為每個例子提供一句：

說話 1.「上午 9 時 17 分，應寫作『9:17 a.m.』，而不應寫作『09:17 a.m.』。」

說話 2.「以『分』和『秒』兩個單位組成複名數表達時距，要寫成『X 分 Y 秒』。」

說話 3.「長除或短除號之中，被除數和除數之間的分隔線可曲可直。」

說話 4.「平均分一堆物件，是指最終分物的結果要滿足每份所得數量相同。」

說話 5.「不管是按圖九、圖十或圖十一的步驟，都可正確地計算除法。」

說話 6.「乘式中，要先寫被乘數。」

說話 7.「解方程時，把等號都對齊可令人較容易看清計算過程。」

說話 8.「一個（常）數與一個代數符號相乘，書寫時要先寫（常）數，後寫代數符號，中間的乘號應該略去不寫。」

說話 9.「一個（常）數與一個代數符號相加，如果要加上單位，就得先把兩數放進括號，然後在後面加上單位；一個（常）數與一個代數符號相乘，單位可直接加在後面。」

說話 10.「進行小數加減，只要能按位值計算，不論是否在小數點右方末尾

處補『0』，都會算得正確的結果。」

說話 11.「直式可以輔助計算三個或以上的數連加，對計算三個或以上的數連減，卻沒多少幫助。」

說話 12.「多位數的『0』要如何讀，並非數學學理衍生的結果。如果採用中國大陸的讀法，多位數的『0』的讀法就會統一，每個多位數就只有一個讀法。」

說話 13.「長方形周界和面積公式中的『長』和『闊』，只是一個隨緣的約定，當長方形的其中一邊被稱爲『長』時，它的鄰邊就叫『闊』。」

說話 14.「如果沒有特別聲明，解題者可運用任何已經掌握的數學知識，以任何合理的方法求解應用題。」

說話 15.「解答應用題沒有劃一的表達方法，一切以是否清晰和準確爲考慮的依據。」

一個命題的真假

命題是指一句本質上可以分辨真假的說話。數學課之上會出現各式各樣的命題，也會花不少時間研討和確立命題的真假。接下來，我們嘗試把上述例子按數學命題與非數學命題的定義分類，並作解說。

數學命題與非數學命題

數學課上出現的命題，可簡單地分成兩類：(一) 數學命題——其真假可純粹藉數學學理知識確定，是數學這門學問的核心組成部分；(二) 非數學命題——其真假的判定涉及數學以外的其他知識。在小學的課程內，除了有機會觸及一些數學命題之外，更可能碰到大量的非數學命題。

數學命題的種類

由於數學命題的真假可純藉數學學理知識確定，只要學生具備那些相關知識，就有能力自行確定真假。因此，講解數學命題時，應在條件許可的情況下讓學生發現其真假，而不是要求學生服從教師的指令。

小學生會碰到的數學命題，大概有三大來源：(甲) 由概念定義衍生，例如說話 4 就是概念「平均分」的定義，由它即可推論得數學命題「把 12

分成 3、4 和 5 三份，不算平均分」的真確性；（乙）由數學關係衍生，例如有了說話 13 關於長方形的「長」和「闊」的定義，即可推論得數學命題「長方形面積 = 長 × 闊」；（丙）由程序衍生，例如說話 5 就是關於三種不同的除法計算程序的數學命題，而說話 10 就是關於小數加減法計算程序的數學命題。要補充一點，說明程序有效性的命題，很少會在小學課堂中顯性地浮現。以長除法爲例，講課時會一面以實例解釋各步驟的合理性，最後也不會出現如「按步驟（一）……（二）……計算，即可找到商和餘數」的數學命題，因句子畢竟太長了。

非數學命題的種類

相反地，非數學命題的真假判定涉及數學以外的其他知識，單從數學考慮無法確定真假，必須借助外部權威。因此，講解非數學命題時，應分清哪些部分是數學推論，哪些卻不是。

小學生會碰到的非數學命題，大概有四大來源：（丁）數學的表達方法，例如說話 3、8、9 指出要依循的表達方式，都並非數學學理衍生的必然結果。要學生跟從，只因這些都真的是主流表達方式；（戊）生活應用的做法，例如說話 1、2 只是生活應用的指示，它們的真假會隨生活應用的習俗改變而改變；（己）價值觀的投射，例如說話 14、15 傳遞的是一種價值取向，目的是向學生宣示一種價值觀，以指導工作。對學生而言，它們的真確性源於教師的期望；（庚）其他學科知識應用於數學科，例如「天平兩邊平衡，顯示兩邊所放物件重量相等」，便是物理學知識應用於數學科的一個非數學命題。

確定命題的真假

確定數學命題的真假，不外歸納和演繹兩途。要確定數學命題「長方形面積 = 長 × 闊」，可表列「長」、「闊」和「面積」的多項數據，讓學生觀察規律，歸納結果。當然，歸納只是從眼前數據，企圖得出覆蓋其他情況的結論的推論方法，明顯存在邏輯漏洞。更有效的方法是藉演繹推論，由每行格數乘以行數得出面積公式。要確定非數學命題的真假，必須借助包括教師在內的外在權威，別無他途。換言之，好的教學應花時間讓學生探討數學命題的真假，因爲有可能從已有知識和能力之中找到答案。即使要進行演繹推論，也可在教師協助之下讓學生量力參與。相反，教授非數

學命題時，要節省時間，並充分借助外在權威，反正不可能單從數學的已有知識和能力之中分辨真假。如果教學時沒有把這些命題的真假與學生已有的數學知識分開，或許會令學生錯認自己的不理解源於學得不好，產生不必要的誤會。例如說話 12 的前一半說「多位數的『0』要如何讀，並非數學學理衍生的結果」，屬非數學命題，只能由教師以權威的角色告訴學生，要避免他們以爲這是從他們的已有知識或能力就可以推論得到。相反地，說話 12 的後一半說「如果採用中國大陸的讀法，多位數的『0』的讀法就會統一，每個多位數就只有一個讀法」，卻屬數學命題。雖然要解釋它的真確性仍需費點唇舌，但是能力較高的學生或可看出端倪，用不著教師以權威角色硬銷。

結語

真正的數學課是要讓學生學會明辨是非，教師不應只要求學生盲目服從數學課的指令或信從老師的每一句說話，而應提供充足的機會讓學生自行發現真假。與其要學生時刻牢記教師的訓示，倒不如孕育一顆求真的心，多花些時間於研習如何確認命題的真假。若能做到以嚴謹的數學方法處理數學，以寬鬆的態度看待非數學的元素，探討「爲甚麼 …（不可以）是這樣」的問題時，師生就有更有效的討論基礎了。

參考資料

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

孫麗谷、王林（2007）。《數學：二年級（上冊）》。上海：上海教育。

馮振業（1999）。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。

馮振業（2002）。無「零」兩可？《數學教育》，15 期，36－39。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁 6－10）。香港：香港數學教育學會。）

黃宇詩（2011）。初小的除法直式，怎樣才是最好? 。《數學教育》，31 期，3－6。

蔡敏英（2013）。關於長除直式寫法的一點補充。《數學教育》，35 期，77－80。

鍾保珠、馮振業（2013）。被乘數和乘數的迷思。載黃家樂、李玉潔、潘維凱（編）。《香港數學教育會議 2013 論文集》（頁 44－55）。香港：香港數學教育學會。

鍾靜（1994）。國民小學數學新課程低年級時間教材的設計。載臺灣省國民學校教師研習會（編）。《國民小學數學科新課程概說（低年級）》（頁 135－145）。台北：臺灣省國民學校教師研習會。

顧汝佐、葉季明、王明歡（1995）。《小學教學全書：數學卷》。上海：上海教育。

香港考試及評核局（2013）。《全港性系統評估數學科試卷》。於 2013 年 12 月 13 日，下載自 www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2013priPaper/P3Math/ TSA2013_ 3MC3.pdf

De Morgan, A. (1910). *On the study and difficulties of mathematics (Third reprint Ed.)*. Chicago: Open Court.

首作者電郵：cifung@ied.edu.hk