

# 數學情意、信念、價值探究之旅<sup>1</sup>

黃毅英

香港中文大學課程與教學學系

對數學情意、信念、以至價值的探尋在近年已形成一個研究熱點。筆者亦參與其中，讓我於此和大家分享當中的旅程及體會。

## 序曲

第五組別（當時筆者初執教時仍有五個組別）的學生一定無可救藥、沒法重拾學習的軌道嗎？教學愈久愈發覺佻皮搗蛋的學生往往相當聰明，縱使有蠢鈍的那些，在另一個領域，如組織活動等又顯得十分能幹熟練。他們何以學數學學得不好？可能是「根底」的問題，也可能是興趣態度和信念的問題，甚至（只）因為他們從不重視（價值！）學習這學科。

早在筆者修讀教育碩士時，論文已探究數學問題解決中的非智力因素[1-2]。加入中文大學後，最先做的研究亦是和鄭肇楨教授關於數學態度的研究，其中包括數學焦慮[3-5]。正面態度、自信、興趣與數學成績有高相關顯而易見。究竟誰影響誰已不是討論的焦點，現時大家都明白到它們之間有著互相帶動的關係（所謂 *reciprocal relationship*）。興趣大了，成績當然不會立竿見影地提高，但若態度變得正面點，付出努力多了，成績可能會稍為提升，提升了反過來增強了自信。自信大了又可能進一步提升興趣……。

## 課堂氣氛—博士論文的探討

念博士時雖然轉到另一課題，但還是有感有些覺得是「務虛」的觀念：課堂學習環境，亦即課堂氣氛。其中的一個主要部分是探討學生所期望的學習環境。研究發現，學生希望在一個既有秩序又輕鬆之環境中學習。在其中同學們既投入又同時安靜，老師認真教學並關心學生，講解清楚並能

---

<sup>1</sup> 本文得張僑平及文浩然的協助，謹此致謝。

提供引發思考的數學題[6-7]。整個研究基於 Fraser 等人的理論框架，提出若學生所期望的環境與感知的環境愈吻合學習就會愈好[8]。

於香港數學課程全面檢討所委託的研究中，筆者等進一步對學生對數學學習環境的期望作大型的探討，包括回收近一萬份問卷及 60 次訪談。得出的結果與上述基本一致[9]。

上面提到的關於學習環境的基本假設是，若把環境設置得愈貼近學生期望，學生會學得愈好。這會帶來一個疑問，我們是否總是遷就學生的意願。全面檢討的研究得出了解答的端倪：其實學生的期望（起碼於香港而言）並非隨意而致，他們很關心自身學習的。如上所說，學生希望課堂有秩序，同學安靜。在全面檢討研究中，學生希望老師能說出公式之來源和何時應用，而不是只叫他們死記；希望老師經常核查他們是否明白，並給與他們足夠引發思考的數題，這不是都符合教學的原理嗎？

從更廣闊的層面去看學校氛圍，現時不同學校的設施與師資其實相去不遠，有時校園的氣氛、傳統、文化，甚至隱含著的價值（例如：一些學校崇尚自由，一些有濃烈的宗教氣氛，一些則重視愛心等）都起著看不到但深層的作用。

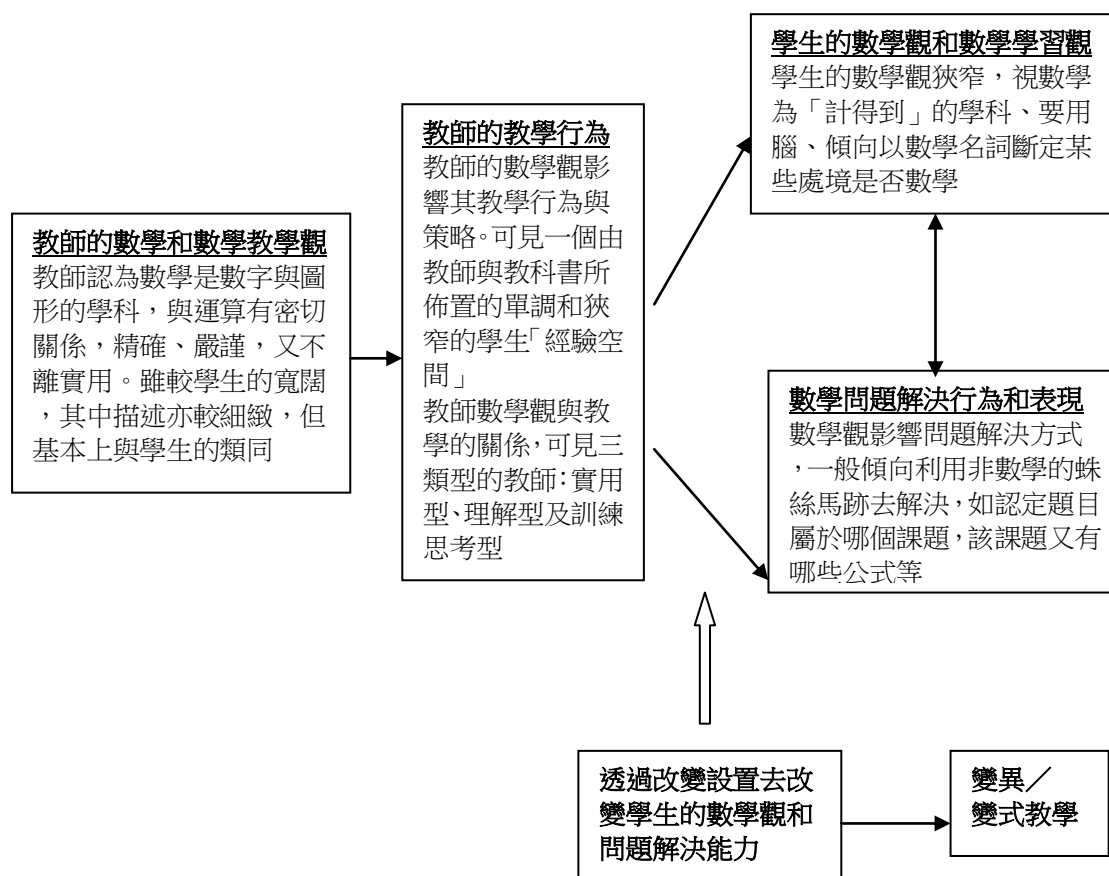
### 數學觀系列研究

博士畢業後的十年八年間，筆者一直做關於數學觀的不同方面研究。所謂數學觀其實是回應一個簡單的問題，就是人認為數學是什麼？這個「人」可以包括學生、老師、甚至公眾人士[10]。亦包括這些人認為數學是應如何學？如何教？整個系列研究可以用下圖概括（圖一）[11]。

當時筆者主要探討學生部分，發覺他們的數學觀相對狹窄。簡單而言，只把數學連繫到數字和「可計算物」（*calculables*）。教師的數學觀雖然相對細緻，但亦基本一致。簡化而言，狹窄的教師數學觀使得他們佈置一個較刻板的學習環境（我們稱之為學生的「生活空間」*lived space*），這便導致學生的狹窄（學習）「成果空間」（*outcome space*）。這包括學生面對非常規題時出現困難，亦包括學生狹窄之數學觀[12]。但不幸地數學老師都曾經是數學學生，他們的數學觀部分建立於他們的學生時期，於是形成惡性循環（縱然這有點簡化，因為教師數學觀亦受到大眾的公眾數學觀影響。蕭文強老師所說的 *collective Anschauung* [13]，不過大眾公共數學觀不見

得闊到那裡)。要扭轉這個循環，一個做法是引進變化。這引申了筆者一系列的關於變異教學和變式教學的研究[14-18]。

上面的研究亦小規模地牽涉了內地和台灣的老師。詳可參考[19]。



圖一 數學觀系列研究

### 有效教學和教師信念

數學教師認為怎樣才是「好」（有效）的數學教學直接影響他的教學行為。可以想像擁有啟發觀的和相信熟能生巧的老師，其教學手法會很不一樣。2003年筆者參與了蔡金法發起澳、中、港、美的跨地域研究，探討小學資深教師對於三個問題組的想法。用訪談形式問他們(1)關於數學、(2)關於數學學習和(3)關於數學教學的問題。香港的參加者有12位資深數學老師。研究結果可參閱[20]。

與此同時筆者的兩名研究生探討教師教學信念對其教學影響，他們的研究與蔡金法的有所不同的是，首先他們的對象不局限於資深教師，而且他們同時探討教師的教學。

首先王倩婷的研究發現教師一般對數學的理解是：強調運算、講求理解、與日常生活有關、訓練思考、建構而成等。研究亦發現受訪教師基本上可分為實用型、理解型和訓練思考型三類。簡單來說，實用型教師強調法則和操作，他們就如一個指導者，要令學生掌握有關法則和技巧的正確步驟和操作；理解型強調理解概念，他們著重講解法則和概念背後的原理，認為操作是由理解帶動，所以他們就如一個解釋者；訓練思考型教師則認為數學是訓練思考的過程，他們著重學生的思考方法，故此在教學時會提出問題讓學生解決，並從而訓練學生的思考，所以他們是一個促進者。

張僑平的研究進一步考慮教師的專業知識及數學觀對教師的教學取向的影響。比如，具有工具性數學信念的教師，其課堂教學以教學內容為中心，注重課堂規範性、內容的連貫性，其教學實施方式因為專業知識的不同又會有差異。擁有豐富專業知識的教師，在教學上會運用更多的類比分析；專業知識有限的教師，則會更多地遵循教材來組織教學，而且注重概念的清楚表述，特別概念中的關鍵字和要素。持有柏拉圖型數學信念的教師，其課堂教學也都是以內容為中心，不過其教學目的主要是為促進學生的理解，這裡的理解指的是對數學知識的概念性理解，包括掌握數學中的事實、規則和步驟，以及明白背後的原理。專業知識豐富的教師會採取的螺旋式上升的方式組織教學，注重教學內容地逐步深入，層層遞進；專業知識有限的教師則強調知識的系統性，注重知識的系統性和完整性，其每一堂課的教學都要完整和規範[21-22]。

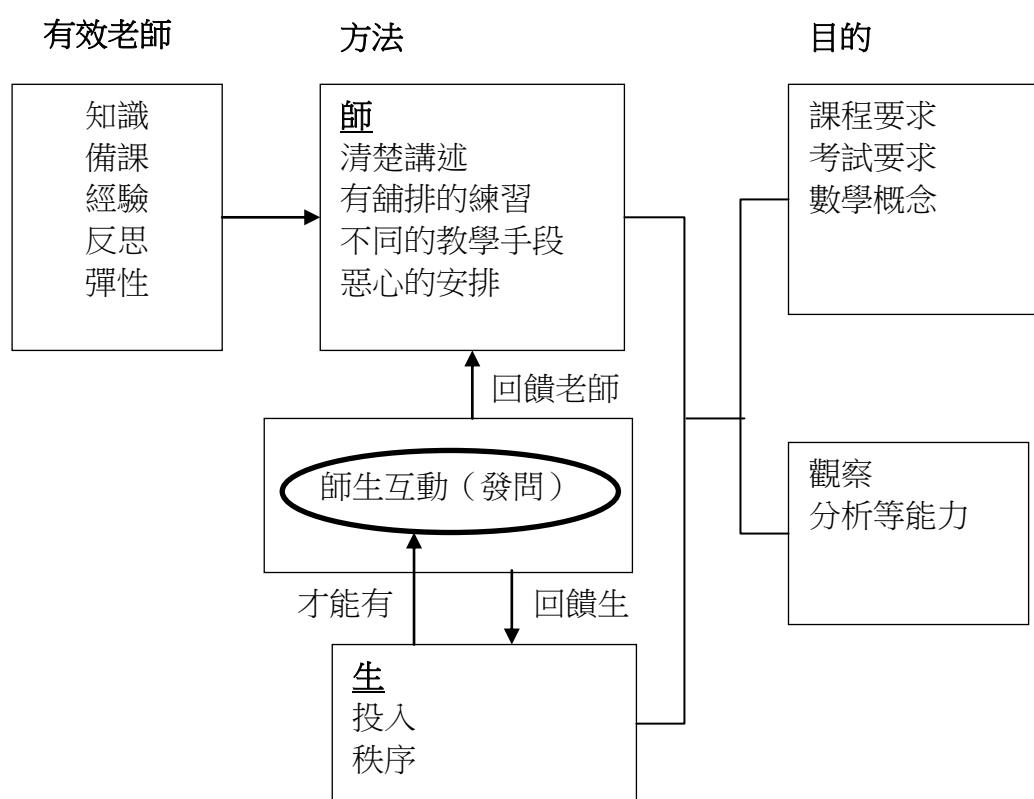
上面數學觀系列研究及王倩婷的研究利用了「假設性情境」，可以說是在研究法上一項小突破。

### 第三波及 WIFI

2008年由澳大利亞的余偉忠教授發起一項牽涉多個地區的「第三波研究」。所謂第三波是指第一波專注智性因素，第二波為情感因素，第三波則為信念與價值。其中第一階段的研究仍是由師生認為什麼是有效數學教學做起。與之前不同的是在單一研究中同時探討師生的觀點（信念與價值）。其中亦有在研究法上的嶄新嘗試，是利用速影（snap shot）作為訪談開展的載體。所謂速影就是在數學課中請三位學生在他感到「靈機一動」時（例如突然明白了、教得很精彩等）把情境以相機拍下，之後訪談時問他明了些什麼，為何在那一刻明白了等等……

研究除了進一步印證先前研究的結果外，更讓我們組一個高效數學教學的圖畫（圖二）。結果已彙集於 ZDM (*ZDM – The International Journal on Mathematics Education*) 專刊中[23]。

我們現再進行的是第二階段的關於數學價值之研究，名為 WIFI (What I Find Important (in mathematics))。第三波及 WIFI 的參與地區包括澳洲、新加坡、泰國、馬來西亞、兩岸四地、日本、美國、土耳其、瑞典等，香港團隊由羅浩源領導。雖然研究仍在進行中，兩階段的研究浮現出兩個主題，首先學生一再強調他們希望在數學課中「又好玩，又學到嘢」，此外是對於「明白」(understanding) 的訴求。



圖二 高效的數學教學

### 明白—明白些什麼？

我們常常說學生「講極都唔明」（怎樣說也不明白），希望他們不只是會「做數」（解決數學題），更要明白。既然數學問題解決是學習數學的主要原因[24]，「做到數」（成功解決數學題）不也是完美結局了嗎？

在筆者的博士研究中，其中一個課題便關於學生怎樣理解「數學理解」（亦即是「明白」）。當時發現學生均不希望只是代入公式算出答案，而是希望真正明白。但他們又把成功解決數學題視為「明白」的主要判準[25]。當時筆者認為，這不是有點矛盾嗎？

在 WIFI 研究中，一個突出的主題是學生重視「導致成功解決問題的理解」。這亦可以說是近年世界上的一個討論話題：原來明白／理解，不只有不同層次也有多種。過往一般學習輕看「程序性理解」，但近年發覺「程序」也可以是「深層」的（deep procedure）[26]。概念也可能有很多種，有些概念不一定能對數學問題解決有直接幫助。在這個研究中顯示，學生所追求的是導致成功解決問題的理解，也就是先前研究所說的知道公式的來源和如何／何時得到運用，於是學生解決問題不但知其然亦知其所以然。不同概念和理解在教與學的作用實有仔細深究的必要[27]。

### 最近期所開展的研究

宗教信仰自然是信念與價值重要來源之一。首先呂玉琴（台灣）、陳葉祥（香港）與筆者進行了問卷研究，比較信奉「中國宗教」（儒、釋、道）和信奉基督教數學老師的數學觀及數學教學觀，在所調查的約 600 名數學老師中，相信基督教的回應者比其他組別更認為數學是精確及可計算，相信中國宗教的回應者比其他組別更認為數學涉及思考，相對於其他組別，相信基督教的回應者持較弱的建構主義觀，宗教性的程度與某些數學信念有微弱的正相關而宗教性的程度與數學教學的建構主義觀有微弱的負相關[28]。現正進行香港地區佛教、基督教與無宗教數學教師的質化研究（透過訪談）[29]。

最新發展為以梁鉅超為主導（其他研究員包括：梁玉麟及筆者）的香港研究資助局優配研究金研究項目，探討職前數學教師的數學知識、信念及教學之間關係及實習前後之改變，研究在開展階段。

### 結語

這許多不同系列的研究均顯示情意、信念、價值無論在學生或老師都起著雖然隱蔽但實質的作用，希望透過我們愈多的了解更能改進數學的教學。

## 參考文獻

- [1] Wong, N. Y. (1988). Effects of self-monitoring and reinforcement on problem solving performance. *Educational Psychology*, 8, 153-159.
- [2] 黃毅英 (1990)。解題與數學教育。《數學傳播》54 期，71-81。後載黃毅英 (編) (1997)。《邁向大眾數學之數學教育》(頁 59-82)。台北：九章出版社。
- [3] 黃毅英、鄭肇楨 (1991)。香港中學生的數學學習態度。《香港中文大學校育學報》，19 期，13-18。
- [4] 黃毅英、鄭肇楨 (1991)。數學學習習慣和成績，父母學歷，居住面積及父母期望及學生期望的關係。《教育研究學報》，6 期，86-92。
- [5] Wong, N. Y. (1992). The relationship among mathematics achievement, affective variables and home background, *Mathematics Education Research Journal*, 4(3), 32-42.
- [6] Wong, N. Y. (1993). The psychosocial environment in the Hong Kong mathematics classroom, *The Journal of Mathematical Behavior*, 12, 303-309.
- [7] Wong, N. Y. (1996). Students' perceptions of their mathematics classroom, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 89-107.
- [8] Fraser, B. J. (1998). Science learning environment: Assessment, effect and determinants. In B. J. Fraser & K. G. Tobin (Eds.), *The international handbook of science education* (pp. 527-564). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [9] Wong, N. Y., Lam, C. C., Leung, F. K. S., Mok, I. A. C., Wong, K. M. (1999). *An Analysis of the views of various sectors on the mathematics curriculum*. Final report of a research commissioned by the Education Department, Hong Kong. [[http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/maths/en/ref\\_res/document/Research2.htm](http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/maths/en/ref_res/document/Research2.htm)]
- [10] Lim, C.S. (1999). *Public Images of Mathematics*. Unpublished Ph.D. thesis. UK: University of Exeter.
- [11] Wong, N. Y., Marton, F., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 25-47.
- [12] 黃毅英、韓繼偉、王倩婷 (2005)。數學觀與數學教育。載黃毅英 (編)，《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》(頁 77-99)。香港：香港數學教育學會。
- [13] Siu, M. K. (1995). Mathematics education in ancient China: What lessons do we learn from it? *Historia Scientiarum*, 4(3), 223-232.

- [14] Wong, N. Y., Chiu, M. M., Wong, K. M., Lam, C. C. (2005). The Lived Space of Mathematics Learning: An Attempt for Change. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 9(1), 25-45.
- [15] Wong, N. Y., Kong, C. K., Lam, C. C., & Wong, K. M. P. (2010). Changing students' conceptions of mathematics through the introduction of variation. *Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 14(4), 361-380.
- [16] 黃毅英、林智中、孫旭花 (2006)。《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》。香港：香港中文大學教育學院香港教育研究所。
- [17] 黃毅英、林智中、陳美恩、王豔玲 (2008)。數學變式課程設計——以小學三個課題為例。《教育學報》35 卷 2 期，1-28。
- [18] Wong, N. Y., Lam, C.C., Sun, X., Chan, A.M. Y. (2009). From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”: Experimenting the spiral *bianshi* mathematics curriculum. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), 363-382.
- [19] 黃毅英 (2002)。數學觀研究綜述。《數學教育學報》11 卷 1 期，1-8。
- [20] Cai, J., Perry, B., Wong, N. Y., & Wang, T. (2009). What is effective teaching? A study of experienced mathematics teachers from Australia, the Mainland China, Hong Kong – China, and the United States. In J. Cai, G. Kaiser, B. Perry, & N. Y. Wong (Eds.), *Effective mathematics teaching from teachers' perspectives: National and cross-national studies* (pp. 1- 36). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- [21] Wong, Q. T., Wong, N. Y., Lam, C. C., & Zhang, Q. P. (2009). Beliefs about mathematics and effective teaching among elementary mathematics teachers in Hong Kong. In J. Cai, G. Kaiser, B. Perry, & N. Y. Wong (Eds.), *Effective mathematics teaching from teachers' perspectives: National and cross-national studies* (pp. 217-234). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- [22] Zhang, Q. P., & Wong, N. Y. (2010). Mathematics teachers' professional knowledge, beliefs and their implications on their teaching. In Y. Shimizu, Y. Sekiguchi, & K. Hino (Eds.), *Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol.2, pp. 849-856). Tokyo, Japan: Japan Society of Mathematics Education.
- [23] Seah, W. T., & Wong, N. Y. (2012). What students value in effective mathematics learning: a ‘Third Wave Project’ research study *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 44(1), 33-43.
- [24] Wong, N. Y., & Watkins, D. (2001). Mathematics understanding: Students' perception. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 10(1), 41-59.



- [25] National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position Paper on Basic Mathematics Skills*. Washington, U.S.: National Institute of Education.
- [26] 黃毅英 (2007)。數學化過程與數學理解。《數學教育》25 期，2-18。
- [27] 黃毅英 (待刊)。數學教學的幾個最基本問題：做數、概念與理解。《學校數學通訊》。
- [28] Chan, Y. C., Wong, N. Y., & Leu, Y. C. (2012). Do teachers with different religious beliefs hold different values in math and math teaching? In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 4, p. 254). Taipei, Taiwan: PME.
- [29] Chan, Y. C., & Wong, N. Y. (2013). Case studies on relationship between religious beliefs and values in mathematics teaching. Unpublished manuscript.

作者電郵：nywong@cuhk.edu.hk