從一節解難教學看學生的解難思路

蔡敏英、劉秀惠
香港教育學院全日制學生

引言

筆者等曾經觀看一節（35 分鐘）解難課的錄像，授課對象為小學六年級的學生。這課節比一般解難課的模式開放、學習氣氛良好，課堂絕大部分的時間均由學生作主導，他們的解難意志高漲，更有 3 位學生主動向全班同學分享其解難思路。本文闡述該課節的實況，當中包括討論老師在該課節中的角色，並嘗試整理及分析學生的答案，與其他可能在課堂出現的答案。

課堂實況

以下是該課節的解難題目：

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口（見圖一）。問三扇活閘的長度分別是多少？

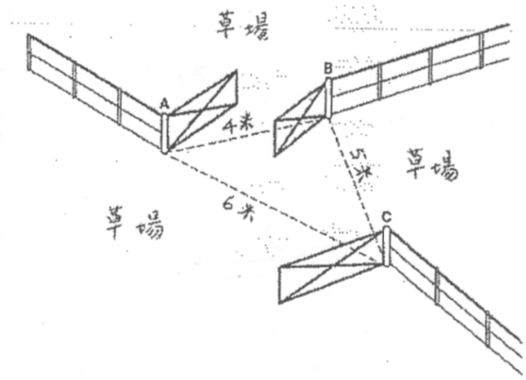


圖　一

一般人碰到這條題目時，大都會認為這是一條屬於中學的數學題目，原因是他們會以聯立三元一次方程求解。

聯立三元一次方程的做法如下：
設 a 米為 A 閘的長度；
　b 米為 B 閘的長度；
　c 米為 C 閘的長度。
得出以下方程組：

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b+c=5 \\ a+c=6 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=4-b \\ b=5-c \\ a=6-c \end{cases}$$

$\because$ $a=4-b$ 及 $a=6-c$
$\therefore$ $4-b=6-c$ ....$(*)$
把 $b=5-c$ 代入 $(*)$ 中，
得出

$$\begin{aligned} 4-(5-c) &= 6-c \\ c-1 &= 6-c \\ 2c &= 7 \\ c &= 3.5 \end{aligned}$$

同樣地，以此類推，可得知 $a=2.5$ 及 $b=1.5$。

其實，這是一條策略開放[1]的題目，聯立三元一次方程只是其中一個解難策略。而小六的學生未有適當的代數訓練，他們可運用甚麼策略求解？老師應怎樣幫助學生求解？

老師的角色

這節解難課的教學過程著重學生的自主性，老師只擔當促進者的角色，其任務主要有兩個：一是讓學生對問題有很好的理解；二是保持學生的解難意志。首先，她向學生講解題目的內容，並邀請學生協助解說，以確保他們對題意有充分的理解，這正如波利亞所說：「把時間花在一個我們不了解的問題上是愚蠢的，所以，理解問題，弄清問題的意義和目的，是我們首要的和明擺著的任務。」（Pólya，1962 / 九章出版社譯，1989，頁 25）

1 一個數學開放題，若其未知的要素是推理，則為策略開放題（戴再平，2002，頁 39）。

接著，老師在引導學生的時候，先以一般性的問題為主，再逐步提出一些特殊化的提問和建議，例如：由說「我經常強調使用簡單的圖像、線段能有助解決難題，多嘗試運用你曾學過的方法。」，逐步轉向說「題目中有什麼不變項？試鎖定不變項，再觀察不變項與變項之間的關係。」，再進一步特殊化說「這 4 米是由哪兩扇活閘所組成、這 5 米是由哪兩扇活閘所組成、這 6 米又是由哪兩扇活閘所組成的？這三個數字存有差異，形成差異的原因又是甚麼？」等，以啟動他們的數學思維，幫助他們解決難題，並引導他們選用適當的解難策略，然後老師便「放手」讓他們自行解決難題。

此外，老師經常在課堂中向學生強調，求得答案並非解難課最困難的部分，最困難的是把自身的思考過程表達出來，因此學生需要把其思考過程記錄於工作紙上。課堂的高潮便是老師邀請學生向全班同學解說其思考過程，雖然大部分學生都能找出該難題的答案，但是有信心向全班同學解說的只有 5 位。而最終，只有 3 位學生向全班同學分享其解法。其實，當學生在全班面前解題時，便要揭示整個求解的過程。這樣的做法，除了使聽者有所得益之外，講者也有所得著。在聽者方面，他們可以參考更多不同的解法，從中獲得一些啓示，也能作出比較及反思，藉此優化其解法。在講者方面，他可以再次驗算其答案與思考過程，讓他有機會進一步完善其解法，加深對數學知識的理解，以及培養其解難能力。同時，他亦藉此機會更了解自身的表達能力，從而作出改善。

學生的解難思路及方法

現在，筆者等嘗試整理及分析他們的解法，其內容大致如下：（上述 3 位學生的文字記錄，見附頁一）

第一位學生的解法：

設 y 米為 A 閘的長度，則 $4-y$ 米為 B 閘的長度及 $6-y$ 米為 C 閘的長度。
由於 B 閘和 C 閘的長度合共 5 米，
得出

$$\begin{aligned}(4-y)+(6-y) &= 5\\ 4+6-5 &= 2y\\ 5 &= 2y\\ y &= 2.5\end{aligned}$$

所以 A 閘的長度為 2.5 米。

因此，B 閘的長度為 $4 - 2.5 = 1.5$ 米及 C 閘的長度為 $6 - 2.5 = 3.5$ 米。
驗算：

$2.5 + 1.5 = 4$ 米 ✓

$1.5 + 3.5 = 5$ 米 ✓

$2.5 + 3.5 = 6$ 米 ✓

符合題意，因此，答案是正確的。

若要以上述的方法來解題，學生需要具有以下能力：

- 能夠清楚地分辨出未知數和已知數分別是甚麼
  未知數：A 閘的長度
  已知數：A 閘和 B 閘合共長 4 米；
  A 閘和 C 閘合共長 6 米；
  B 閘和 C 閘合共長 5 米。
- 能夠把需要找出的答案設定為未知數（以 y 表示 A 閘的長度），從未知數和已知數的關係中找到線索，以已知數和未知數 y 表示其餘的未知數：以已知數和未知數 y 表示 B 閘和 C 閘的長度（分別以 $4 - y$ 及 $6 - y$ 表示 B 閘和 C 閘的長度），使得其餘的未知數與已知數，彼此的關係能夠有效地確立。
- 能夠把已設定的未知數代入問題中，依題意列出方程[2]，即列出 $(4 - y) + (6 - y) = 5$，然後解方程，並驗算答案。

當然，即使學生都是以方程作開始，但不同的人對於同一條題目著眼的部分未必相同，因而他們會列出不同的方程來求解。以這條題目為例，上述學生著眼於 A 閘與其餘兩扇活閘的關係來列出方程，另外，也有學生是著眼於三個草場進出口的總長度，因此，他們往後的解難過程會略有不同。

[2] 列方程是指把文字陳述的條件，以數學符號來表示（Pólya，1957 / 蔡坤憲譯，2006，頁 107）。

該學生的做法大致如下（該學生的文字記錄，見附頁二）：

設 a 米為 A 閘的長度，b 米為 B 閘的長度，c 米為 C 閘的長度。
由於三個草場進出口是由兩扇 A 閘、兩扇 B 閘及兩扇 C 閘所組成的，其總長度為 15 米，得出 $2a + 2b + 2c = 15$。
學生再利用圖二，找出 $(a + 1) = c$ .... (#)

$(b + 1) = a$ .... (##)

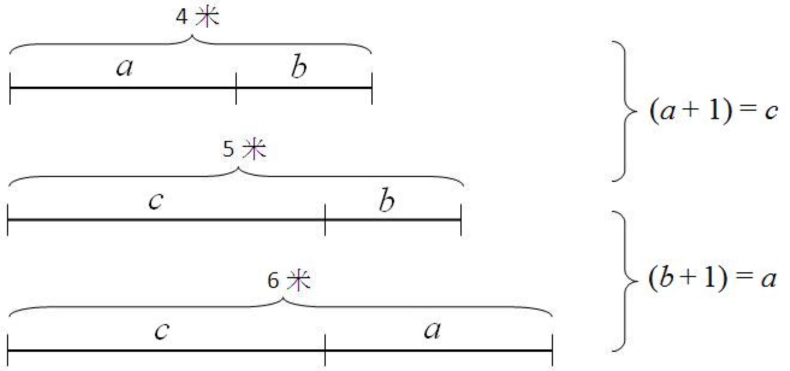


圖　二

然後再將 (##) 代入 (#)，得出 $((b + 1) + 1) = c$，即 $(b + 2) = c$........... (###)，接著把 $2a + 2b + 2c = 15$ 簡化為 $a + b + c = 7.5$，再將 (##) 及 (###) 同時代入 $a + b + c = 7.5$，從而求得 B 閘的長度為 1.5 米。既然已找出 B 閘的長度，餘下兩扇活閘的長度也能輕易求得。

這位學生開始時無法解決涉及三個未知數的方程，於是他試著透過圖二找出各個未知數之間的關係，改變未知數（例如：以 $(a + 1)$ 來表示 c），逐步把涉及三個未知數的方程轉化為只涉及一個未知數的方程，即他懂得計算的方程。由此可見，他的解難能力相當不俗。

第二位學生的解法：

假設 A 閘和 B 閘的長度是一樣的，已知 A 閘和 B 閘的長度合共 4 米，這麼 A 閘和 B 閘的長度分別是 2 米。但由於 A 閘和 C 閘的長度合共 6 米，B 閘和 C 閘的長度合共 5 米，但是 C 閘的長度是不變的。因此，這個假設不成立。

另外，A 閘和 C 閘合共的長度比 B 閘和 C 閘合共的長度多 1 米，從而推論出 A 閘的長度比 B 閘的長度多 1 米。換句話說，

$\because$ (A 閘的長度 $+$ C 閘的長度) $-$ (B 閘的長度 $+$ C 閘的長度) $=$ 1

$\therefore$ A 閘的長度 $>$ B 閘的長度

綜合上述的推論（A 閘和 B 閘的長度不是一樣的、A 閘和 B 閘長度相差 1 米及 A 閘較 B 閘長），故把其相差平分予這兩扇活閘，即 A 閘和 B 閘各得 0.5 米的差，得出 A 閘的長度為 2.5 米，B 閘的長度為 1.5 米。繼而求得 C 閘的長度為 $6 - 2.5 = 3.5$ 米。

若要以上述的方法來解題，學生需要具有以下能力：

- 能夠對題目作出合理的假設，例如：已知 A 閘和 B 閘的長度合共 4 米，便不會假設 A 閘的長度是 4 米或以上。
- 能夠證明假設是否正確，如假設不正確，也能提出反駁的理據，例如：由於 A 閘和 C 閘的長度合共 6 米，B 閘和 C 閘的長度合共 5 米，但是 C 閘的長度是不變的。因此 A 閘和 B 閘的長度是不一樣的。
- 能夠檢視題目中的其他條件，透過觀察及推論，從而得到更多有助求解的資料（例如：A 閘和 C 閘合共的長度比 B 閘和 C 閘合共的長度多 1 米，從而推論出 A 閘的長度比 B 閘的長度多 1 米），修改先前提出的假設（把假設「A 閘的長度 $=$ B 閘的長度」修改為「A 閘的長度 $>$ B 閘的長度」），直至找到能夠滿足題目的解為止。

第三位學生的解法：

由於三個草場進出口是由兩扇 *A* 閘、兩扇 *B* 閘及兩扇 *C* 閘所組成的，其總長度為 15 米，因此，三扇活閘的總長度為 $15 \div 2 = 7.5$ 米。假設每扇活閘的長度是一樣的，則每扇活閘長 $7.5 \div 3 = 2.5$ 米。若根據上述假設，三個草場進出口便會形成一個等邊三角形，而每個進出口的平均長度則為 5 米，如圖三所示。

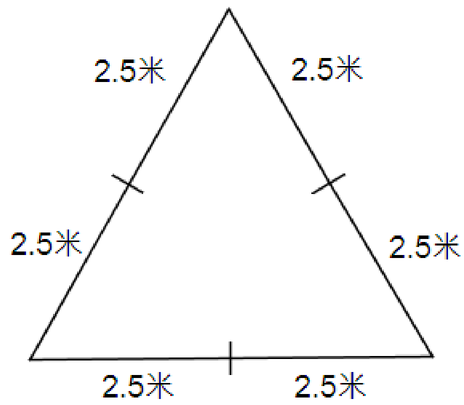


圖　三

已知每個草場進出口的實際長度分別為 4 米、5 米及 6 米，由於 *A* 閘和 *C* 閘的長度合共為 6 米，比每個進出口的平均長度（即 5 米）多 1 米，即 $2.5 + 2.5 + 1 = 6$ 米才符合題意，故得知其中一扇活閘長 3.5 米。同樣地，由於 *A* 閘和 *B* 閘的長度合共為 4 米，比每個進出口的平均長度（即 5 米）少 1 米，即 $2.5 + 2.5 - 1 = 4$ 米才符合題意，故得知其中一扇活閘長 1.5 米。最後，學生總結出 *A* 閘的長度為 2.5 米、*B* 閘的長度為 1.5 米及 *C* 閘的長度為 3.5 米。

雖然該學生能夠找出答案，但他在全班面前解題時，說話欠組織，含糊不清，亦欠缺完整句子，令不少學生對其解說摸不著頭腦，亦令老師無法即時判斷他的思路是否正確，其問題如下：

- 他說：「三扇活閘的平均長度為 7.5 米」，但 7.5 米其實是三扇活閘的總長度，而非其平均長度。
- 他沒有足夠的理據支持他的推論，例如：他不能直接總結出其中一扇活閘長 3.5 米　。其實他可以這樣補充：

> 已知 A 閘和 B 閘合共長 4 米、A 閘和 C 閘合共長 6 米，以及 B 閘和 C 閘合共長 5 米。假設把多出的 1 米，全部或部分給予 A 閘，A 閘的長度則為 $(2.5 + x)$ 米，其中 $0 < x \le 1$，而 B 閘和 C 閘的長度分別為 $6 – (2.5 + x)$ 米和 $4 – (2.5 + x)$ 米。
>
> 根據以上假設，B 閘和 C 閘的長度合共長：
>
> $$\begin{aligned} & 6 - (2.5 + x) + 4 - (2.5 + x) \\ &= 3.5 - x + 1.5 - x \\ &= 5 - 2x \\ &\neq 5 \end{aligned}$$
>
> 由此可見，以上假設存在矛盾，故多出的 1 米不能全部或部分給予 A 閘，即只可取 $x = 0$ 才符合題意。因此，學生在解說時提及的差異[3]只可分別給予 B 閘和 C 閘。

- 他沒有驗算為何 A 閘的長度為 2.5 米、B 閘的長度為 1.5 米及 C 閘的長度為 3.5 米。

若要以上述的方法來解題，該學生需要具有的能力與第二位向全班解說的學生甚為相似，他們都是採用了假設法和邏輯推理來求解，但不同的是第二位學生以「假設 A 閘和 B 閘的長度是一樣的」作開始；而第三位學生則以「假設每扇活閘的長度為 2.5 米」作開始。其實，第三位學生的解難策略與處理「雞兔同籠」的策略大致相同。「雞兔同籠」先假設全都是雞，然後比較腳數和已知條件的差異，以兔換雞（只要把一隻雞加上兩條腿，便可換成一隻兔），藉此推論出雞的數目和兔的數目各有多少；而他則先假設每扇活閘的長度為 2.5 米，然後比較 2.5 米與其實際長度的差異，藉此推論出各扇活閘的長度。

試誤法[4]：

梁志強（2008）指出當學生面對一道不熟悉的題目時，假若未能即時

---

3 A 閘和 C 閘的長度合共為 6 米，比每個進出口的平均長度（即 5 米）多 1 米；A 閘和 B 閘的長度合共為 4 米，比每個進出口的平均長度（即 5 米）少 1 米。

4 已知 A 閘和 B 閘的長度合共為 4 米；B 閘和 C 閘的長度合共為 5 米；A 閘和 C 閘的長度合共為 6 米。他們先假設其中一扇活閘的長度，然後再把其假設的長度代入以上三個組合當中，進行試誤，繼而求出答案。

想出解題方法，他們往往會以試誤作開始，藉此帶來新的啟示，甚至可以找到答案。從工作紙上的記錄可見，有些學生是隨意選取一些數字作開始，他們在初次試誤後，當試值未能滿足問題的所有條件時，能有系統地調節試值，直至找到答案為止（見附頁三）。再以第二位學生的解法為例，他先以試誤作開始，再配合邏輯推理來求解。由此可見，解題時不單只會運用一種的解難策略，還可以配合其他策略同時使用。全班 37 人，當中有 9 位學生都是以試誤作開始，但稍後的解難策略和過程則各有不同。很可惜的是，班中有 2 位學生由始至終都是停留於試誤的階段（見附頁四）。然而，試誤不是最上策的解難方法，原因是當題目的數值越大，符合條件的組合亦相對越多，這種做法十分費時！

順帶一提，班中有 4 位學生，其解題過程中從來沒有使用過試誤法；有 16 位學生，雖然能夠找出正確答案，但是其工作紙上的記錄欠完整，故無法判斷其解難思路和策略；有 4 位學生，未能完成題目；有 2 位學生，未能求出正確答案。

可能在課堂出現的解法：

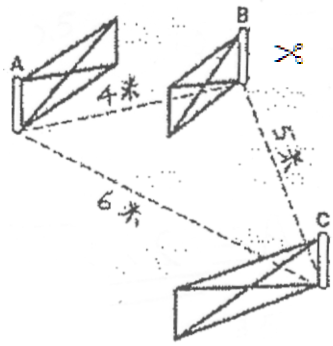


圖　四

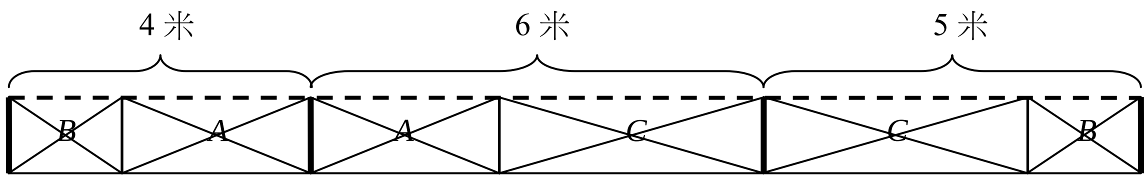


圖　五

觀察三個草場進出口，再利用三扇活閘是可以兩邊拼合的觀點，便可以一線段來表示它們的總長度，即如圖五所示[5]。從圖五中，不難觀察到一扇 *B* 閘、兩扇 *A* 閘和一扇 *C* 閘合共長 10 米。已知一扇 *B* 閘和一扇 *C* 閘合共長 5 米，只要把 10 米減去 5 米便可求兩扇 *A* 閘的長度，即一扇 *A* 閘的長度為 $(10 - 5) \div 2 = 2.5$ 米。接下來，要找出餘下兩扇活閘的長度亦十分容易。

課堂中，老師曾多次提示學生利用線段來表示題目中所提供的資料。雖然大部分學生都有聽從老師的提示，但他們多數分別以三條線段來表示三組活閘組合（見附頁五），從中可能觀察到 *A* 閘比 *B* 閘長 1 米及 *C* 閘比 *A* 閘長 1 米，若利用以上資料再進一步求解，當中所涉及的方法較為繁複，如推理或方程等，能力稍遜的學生可能會在此卻步。

假若他們有多角度思考事物的習慣，能夠全面地觀察事物的內外、各項事物之間的關係，以一條線段來表示三個草場進出口的總長度，即利用「可能在課堂出現的解法」來求解，而當中所涉及的數學運算，相信初小學生也能應付。因此，筆者等認為這是最簡單的方法。面對如此複雜的難題，學生輕而易舉便能找出答案，這樣對他們的解難興趣和意志的提升有很大的促進作用。

結語

策略開放的數學問題讓學生可以根據各自已有的數學知識和經驗，從不同的角度解構問題，使同一條題目得出不同的解題方法。因此，老師應該讓學生多接觸這類型的題目，讓他們經歷多種多樣的數學思考過程，激發他們獨立思考，從而增強他們解題的信心。

本文承蒙馮振業博士提供寶貴意見，謹此致謝。

參考文獻

波利亞（Pólya, G.）（1989）。《數學發現（1、2 冊）》（Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving（combined edition），九章出版社

[5] 由 ✂ 作固定點，把圖四展開為圖五。當然，亦可分別以三角形的另外兩個頂點作固定點，把圖四展開，再利用相同的方法來求解。

譯）。臺北：九章。（原作 1962 年出版）

波利亞（Pólya, G.）（2006）。《怎樣解題》（How to solve it: a new aspect of mathematical method（2nd ed.），蔡坤憲譯）。臺北：天下遠見。（原作 1957 年出版）

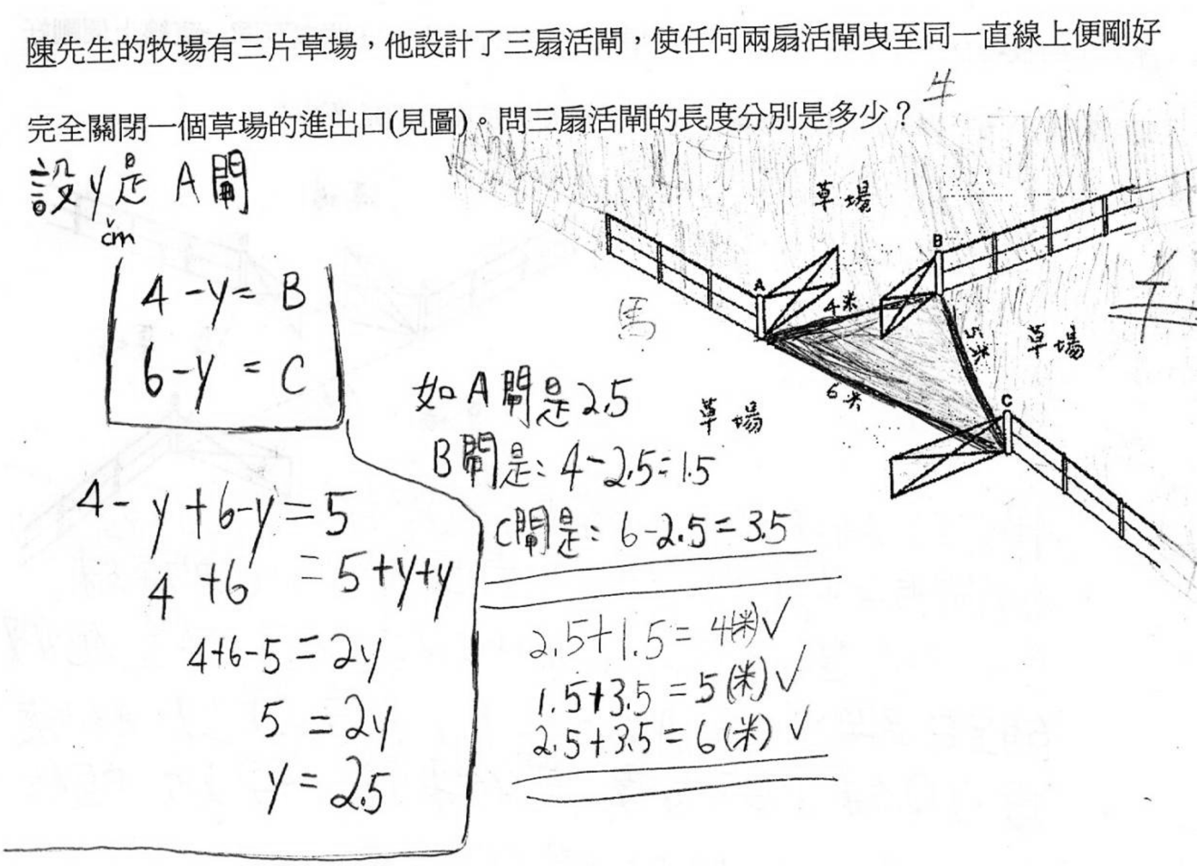
梁志強（2008）。《小學數學解難與探究》。香港：教育出版社有限公司。

戴再平（2002）。《開放題－數學教學的新模式》。上海：上海教育。

作者電郵： 蔡敏英 tsoimanying@gmail.com
劉秀惠 lausauwai@gmailcom

附頁一

第一位學生：



陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？

設 y 是 A 閘 cm

$4-y=B$

$6-y=C$

$4-y+6-y=5$

$4+6=5+y+y$

$4+6-5=2y$

$5=2y$

$y=2.5$

如 A 閘是 2.5

B 閘是：$4-2.5=1.5$

C 閘是：$6-2.5=3.5$

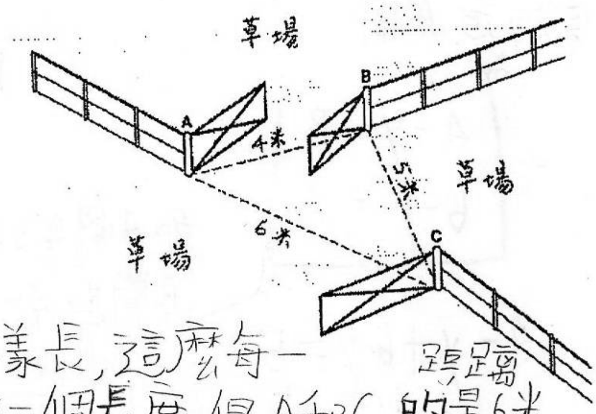
$2.5+1.5=4$(米) ✓

$1.5+3.5=5$(米) ✓

$2.5+3.5=6$(米) ✓

第二位學生：

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？



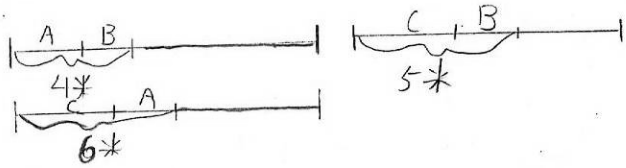
A:2.5(米)

B:1.5(米)

C:3.5(米)

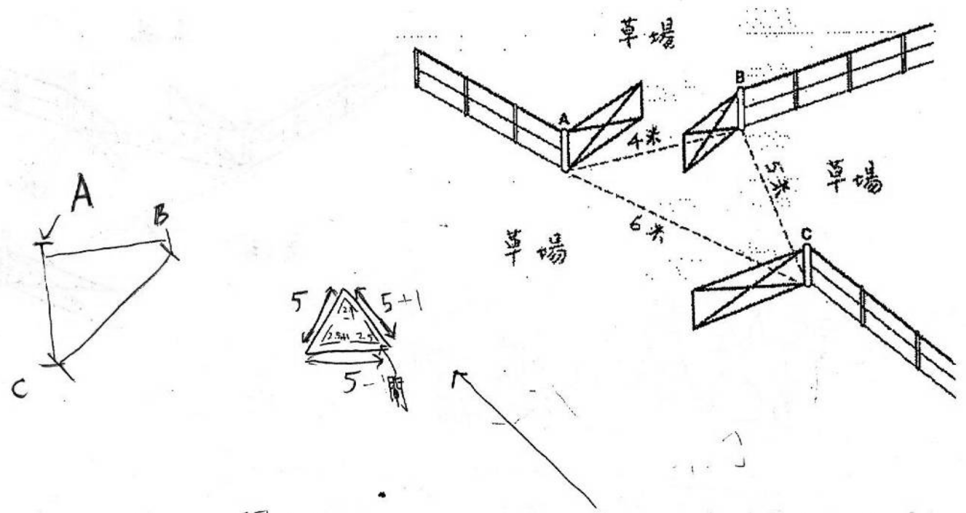
假設A和B閘是一樣長，這麼每一個閘長2米，C閘只有一個長度，但A和C的距離是6米，B和C的距離是5米所A和B的長度不是一樣。他們的距離是一米，A和C比B和C長所以A的長度加0.5米B的長度減0.5米，所以A是2.5，B是1.5

6-2.5=3.5 所以，A是2.5，B是1.5，C是3.5



第三位學生：

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？

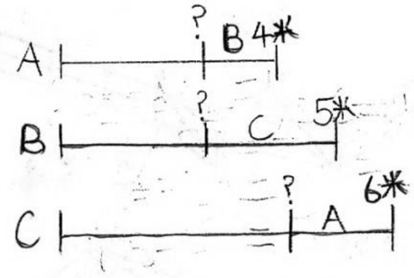


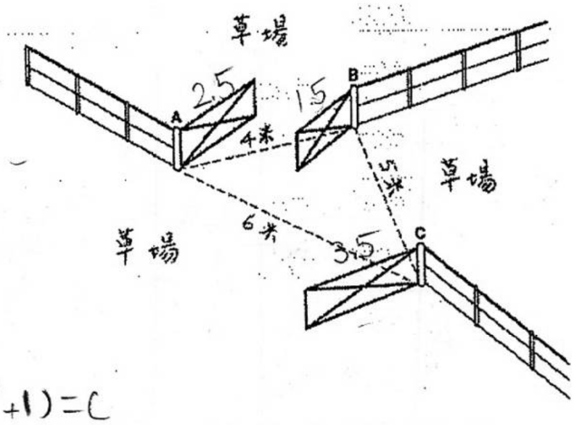
這樣，將它變成一個等邊角
每條邊是5cm

因為所有大閘加起來=15
但每個閘都是用兩個小閘組成的，所以除以2=7.5，
7.5÷3=三個小閘的平均長度，中3個大閘平均長5米，因為
上圖說明每個閘的長道是4，5，6，所以=2.5-1+2.5+1+2.5。
A閘:1.5 B:2.5; C:3.5

附頁二

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？





$(A+1)=C$

$(B+1)=A \quad ((B+1)+1)=C$

$(2A+2B+2C)=15$

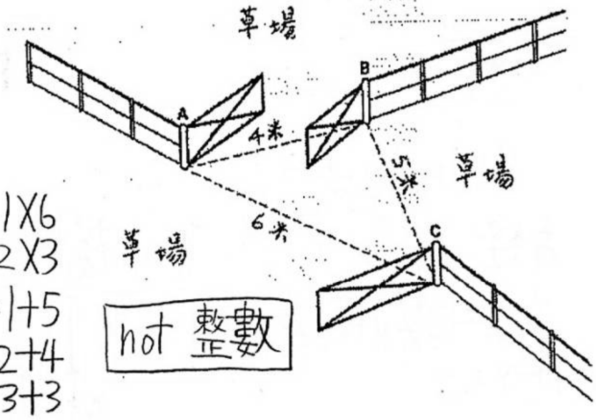
$\dfrac{(2A+2B+2C)}{2}=\dfrac{15}{2}$

$(A+B+C)=7.5 \qquad 4-1.5=\overset{A}{2.5}$

$(7.5-3)\div 3=\overset{B}{1.5} \qquad 6-2.5=\overset{C}{3.5}$

附頁三

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？



√6 = a+c　　C>A>B

□4 = a+b

XX5 = b+c

X ex1

C=3] 6√

A=3] 4□

B=1

B+C=4X

6=1X6

2X3

6=1+5

2+4

3+3

not 整數

√ ex2

C=3.5] 5

B=1.5] 6

A=2.5] 4

Ans.

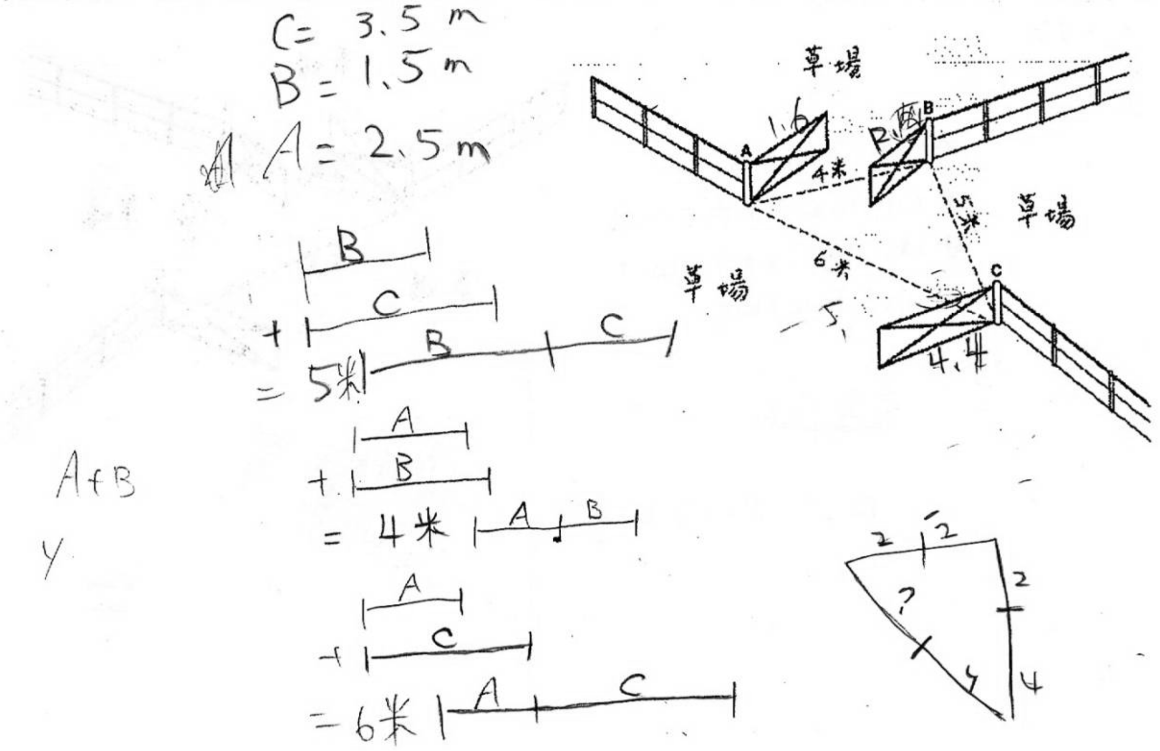
C=3.5m

B=1.5m

A=2.5m

附頁四

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？



附頁五

陳先生的牧場有三片草場，他設計了三扇活閘，使任何兩扇活閘曳至同一直線上便剛好完全關閉一個草場的進出口(見圖)。問三扇活閘的長度分別是多少？