

別讓教學沉溺在含糊中（小三分數）

黃宇詩

引言

香港的小學課程由三年級開始引入分數的概念。不知什麼原因，小學的分數教學總喜歡與圖形連上密切的關係。「圖中着色部分佔全圖的幾分之幾？」可算是小三分數教材中必然出現的題型。對小三學生而言，這問句原本並無什麼錯誤，當中的字眼甚至是簡潔清晰。可是，學生的知識多寡會影響着他們對習題的理解。現今的學生經常出現超前學習的情況，教師對學生的要求亦隨之而改變。但這個不全面的改變卻令分數的教學出現了不少問題。

探討之先，我們必須清楚理解分數的定義。我們說：把某量平均分成 b 份，其中的一份的 a 倍便是整體 b 分之 a （寫作 $\frac{a}{b}$ ）。當中的「量」可以是物體的數量，可以是一個長度，也可以是面積、體積、幣值等等；平均分中的「平均」則包含了完全相同的意思。下面是現時小三分數教學及教材中，三個常見的問題：

一) 用語表達不清晰

當學生的知識愈發增加，考慮的「量」可能性便增多。所以，教師教學及擬題時應清楚指明考慮的「量」是什麼，以適切地評估學生對概念的理解。以下例子說明了考慮不同的量會如何影響問題的解。

（例 1）小明有 2 元硬幣 3 個，1 元硬幣 6 個，共 12 元。問以下那個（些）硬幣組合是小明的硬幣的 $\frac{1}{3}$ ？

A



B



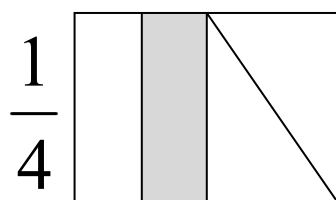
C



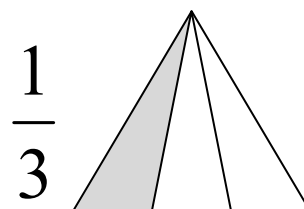
考慮的量	答案	解釋
考慮硬幣的幣值	A 或 B	因為 12 元的 $\frac{1}{3}$ 是 4 元，那麼組成 4 元的硬幣組合才可以是正確的解。
只考慮硬幣的個數	B 或 C	因為 9 個硬幣的 $\frac{1}{3}$ 是 3 個。
考慮整個硬幣本身 (視 1 元和 2 元硬幣 為不同的物件)	只有 B	因為把小明有的硬幣平均分成三份，即分成完全相同的三份，那麼其中的一份便是 1 個 2 元硬幣和 2 個 1 元硬幣。

由於學生對問題會有不同的理解，教師擬題時應務求盡量清晰，避免錯誤評估學生能力。例如期望答題者考慮硬幣的幣值時，問題應修正為「哪個(些)硬幣組合是小明的硬幣幣值的 $\frac{1}{3}$ ？」。香港貨幣是小一的課題，學生擁有相關的知識後很容易把知識混合，教師應讓學生明白：若題目未有指明分數中考慮的量時，答題者應該把要求與分數對應的東西視作不同的物件，然後按數量等分處理。如此，上題的答案只有 B。

(例 2) 下面圖形的着色部分佔全圖的分數與其左方的分數相符嗎？



圖一

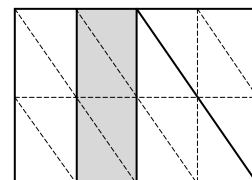


圖二

按照以上的論述，因題目未有指明分數考慮的量，我們必須把圖形分成完全相同的等份後，才能以分數表示。上面二圖均不是等分圖形，因此，我們不能直接斷定圖形的着色部分佔全圖的分數是否與給定的分數相符。若你認為以上兩個分數皆與圖像相配合時，應重新檢視你考慮的是否圖形的面積。與上例同理，若是考慮面積，那麼題目改為「圖形的着色部分面積佔全圖面積的分數與給定的分數相符嗎？」會較為恰當。教師擬題時必須清楚列明考慮的量是什麼，不要為了減省題目字數，讓學生在似是而非的學習環境中建構知識。

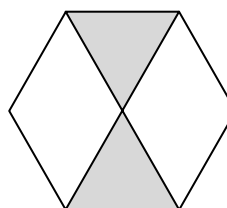
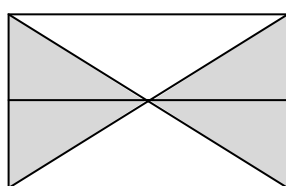
二) 對教學要求未有清晰定位

「面積」乃屬於四年級的課題，若三年級的分數教學真的必須與圖形緊密地連繫着，教師也應完全地將面積的概念避而不談。因此，與圖形有關的三年級分數習題只應包括那些已分成全等圖形的圖像，全等圖形的個數也必須能被分母（均分的份數）數值整除。只有這樣，教學時才能把面積的概念完全忽略。以（例 2）為例，若非考慮圖形的面積，我們可嘗試把原本的圖形加線均分割成一些全等圖形，然後以分割後的全等圖形數量作為分數中考慮的量。右圖是圖一其中一個分割成全等圖形的方法。只要把這 16 個小三角形平均分成 4 份，取其中一份（其中一份的一倍），即 4 個小三角形，便能得知圖像的四分之一是 4 個小三角形，從而確定分數與圖像相符。至於圖二，由於我們難以把圖形加線分割成一些全等的圖形，故未能檢定分數與圖像是否相符。



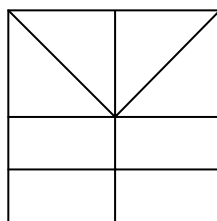
縱使以上加線分割的方法可把面積的概念完全避而不談，但值得注意的是「圖形分割」也屬於四年級的課題。故這些需要加線完成的習題本不應出現於三年級的教學中。可是，坊間不少教材（甚至全港性系統評估（TSA））對三年級學生均有圖形分割方面的要求。在一些分數的習題中，他們期望學生遇到未被均分的圖形時，會先嘗試把圖像加線均分，然後按圖均分後的圖形列出分數。以下有兩個例子：

（例 3）用分數表示着色部分佔全圖的多少。



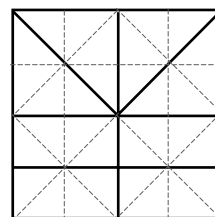
（取自長河小學活用數學訓練營 3 下 25 頁 題 6, 7）

(例 4) 用鉛筆把下圖的四分之一塗上陰影。



(取自 09 年全港性系統評估
小學三年級數學科 分卷一 題 10)

既然全港性系統評估對學生有如此的要求，教師們只好在教學上稍微作出調適，在三年級的教學中也加入可藉均分成全等圖形來找出相應分數的習題。但對於這些需要加線均分的習題，我們是否也應該就分割的難度加上清晰的指標，以免難度過高而阻礙了分數的教與學呢？以上述全港性系統評估問題（例 4）為例，由於問題未有提及考慮面積的四分之一，加上三年級學生未有面積的概念，故學生必須把圖形先分割為全等的圖形，再以分物的形式找出答案。而最簡單的分割方法如左圖示，相信僅是這個分割的步驟，已把不少三年級學生難倒了。圖形分割是四年級的課程，這道小三的試題是否真的能夠檢視學生對分數的掌握，真值得商榷。

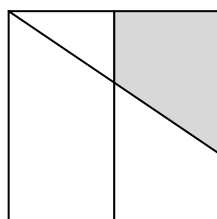


現時坊間有很多專為全港性系統評估而設的練習本，當中有不少超出學生能力的習題。這或會阻礙學生的學習，教師應對題目有所選擇取捨或適當地作出修改，以清晰教學重點。

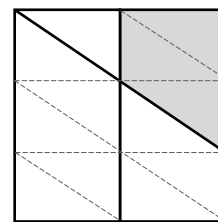
三) 問題質素低、有礙評估學生能力

一道好的問題，應能從學生的作答準確反映出學生的能力。意思是：概念有錯誤或不清晰的學生並不應在答題中得到正確的答案。以下有兩個擬題質素低的習題例子，提醒教師擬題時可多加注意的地方。

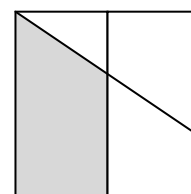
(例 5) 用分數表示着色部分佔全圖的幾分之幾。



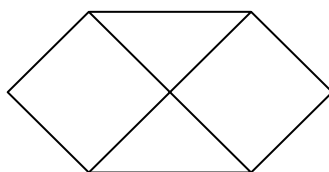
此題日期望學生先把未被均分的圖形加線分割至均分圖形（如右圖示），然後再按照着色的全等三角形數目佔所有全等三角形數目的比例找出相應的分數。可是，縱使學生不知道分數包含了「均分」的含義，僅因為圖中着色部分佔四份的其中一份，亦可寫出 $\frac{1}{4}$ ，而得出正確答案。那麼，我們便不能從學生的作答了解學生對分數的掌握是否清晰。若擬題者在設計問題時能更仔細考慮到每個細節，把問題稍作修改，便能取得更佳的果效。



右圖是其中一個例 5 的修訂方法。修訂後的圖像着色部分佔全圖的 $\frac{5}{12}$ 。這一方面解決了學生以上述錯誤的方法得出正確答案的問題，令習題更準確地評估學生能力。另一方面避開了分數化簡的問題，減低學生產生混亂的機會。



（例 6）用鉛筆把下圖的三分之二塗上陰影。



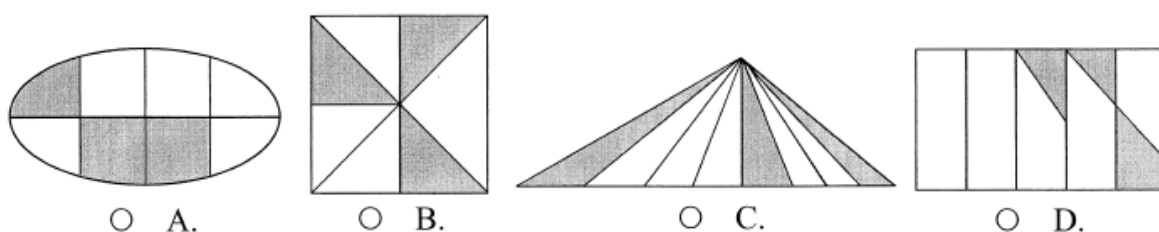
（取自 08 年 小三全港性系統評估 分卷二 題 9）

與上例同理，問題期望學生把圖中的 2 個正方形加上對角線，令圖形變成 6 個全等三角形，然後把 6 個三角形均分成 3 份，把其中一份的 2 倍（即 4 個三角形）塗上陰影。可是，縱使學生未了解分數中包含了「均分」的含義，也有機會單單根據分子的 2，把圖形的兩個正方形塗上陰影，最後以錯誤的方法得出正確的答案。因此，若學生未有在圖中加線把圖形平均分割，卻把 2 個正方形塗上陰影時，我們便難以判別學生的分數概念是否正確。那麼，我們說：這類問題的效度存疑，因為它不一定能有效評估學生對概念的掌握。既然問題在於學生未有展示加線均分的步驟，而列出正確答案，我們或可考慮在題目中要求學生必須展示出加線的步驟來解決現有問題。但是，這樣卻提醒了學生需要先把圖形平均分割，令問題失去了原有的評估效用。

在考試導向的香港，全港性系統評估對整個小學教學的實施有着一定

的指標性。從上述例子可見，他們期望學生遇到未被均分的圖像時，應設法加線均分，然後找出分數。應注意的是，對於某類問題的選擇，卻容易因此而出現數理謬誤。

(例 7) 下列各圖中，哪個圖的陰影部分佔全圖的 $\frac{3}{8}$?



(取自 08 年全港性系統評估 小學三年級數學科 分卷四 題 8)

根據評卷準則，以上問題的正確答案只有 B。以上四個選擇中，所有選擇都不是均分圖形，意思是學生要得出正確答案，他們必須先嘗試把圖形加線分割至均分圖形，然後才能判別圖中着色部分是否佔全圖的 $\frac{3}{8}$ 。既然題目要求學生遇到未被均分的圖形時，要嘗試以加線分割的方法去找出分數，那麼擬題者便應小心確保其他的選擇經無限細分後，仍不可能是正確答案，以免答案出現不確定性。我們若以面積的概念協助思考，不難發現答案 A 及答案 C 被無限細分後，着色部分是有機會佔全圖的 $\frac{3}{8}$ 的。那麼，我們便不能判別它們是否正確答案。雖然問題字眼用「哪個圖...」，這表示了答案只有一個，而選擇 B 亦無疑是較容易判斷它為正確答案的一個。可是，若學生無法證實其他選擇是否正確，而只能選擇較佳而不是唯一的答案，這問題便有待改善了。如若學生選用了排他法去協助選答，他們更會浪費了很多寶貴的時間呢！

作為教師，評估試題的質素是我們無法控制的；課本對數學概念的演繹是我們無法改變的；但如何教導學生去建構概念卻在我們的掌控之內。唯有教師們一同認真對待每個課堂，不再讓教學沉溺在含糊當中，才有機會將香港的數學教育發展至另一個新領域，一個有質素、有地位的領域。但願各位教師都能為數學教育的未來付出一分力，令小學數學教學變得更專業。

數學教育第三十二期 (12/2011)

本文得馮振業博士提供意見，謹此致意。

參考文獻

課室數學編寫組 (2003)。《長河小學活用數學訓練營》。3 下。25 頁。題 6, 7。香港：長河出版社。

《達標數學基本能力評估》(2007)。模擬試題及應試策略 (小學三年級)。模擬試題 (五)。題 15。香港：新領域出版社有限公司。

香港考試及評核局。《小三全港性系統評估》。評估試卷及評估參考。取自：
<http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/TSA/zh/PriPaperSchema.html>

作者電郵：zippywong@hotmail.com.hk