

讓計算器成為迅速邁向數學宇宙的飛碟

黃志華

近日，看到英國數學家 Michael Atiyah 的文集的中譯本，其中一篇發表於八四年的報告(原報告的題目為 Mathematics and the Computer Revolution)提到因計算器而引致的數學教育危機：

「……即使所有的工作都可以靠按鍵鈕來完成，我們也必須教會兒童應該按哪個鍵鈕。在最初等水平上，他們必須知道甚麼時候按加號鍵，甚麼時候按乘號鍵。這意味著，必須更多地強調對所涉及的過程的理解，而少強調具體的常規計算。這可以解釋為是教育的一個進步，因為避免了令人生厭的繁瑣計算又提高了鑒賞的能力。然而，生活並不如此簡單，過份的依賴機器會導致人類相應的能力的萎縮-----比汽車已不知不覺地降低了人們使用自己雙腿的能力更加有害。近年來逐漸波及到平民百姓的一種反作用力，或許會在某個時候使心算練習成為智力治療的一種形式。」

這種論調是十分悲觀的。

十多年過去了，今天的計算器已普及至成為六、七歲小孩子的玩具，八個位內的四則運算完全可以按鍵解決。但數學教育的天空塌下來了沒有？

「水能載舟，亦能覆舟」是千古至理，重要的是如何因勢利導，寓教育於娛樂。假如站在教育前線的老師們能夠讓幾乎已人手一部的計算器成為迅速邁向數學宇宙中心的飛碟，引領學生進入精彩的數學天地，那是再理想不過的。

幾年前，筆者曾購得一本小書《妙趣橫生的智力遊戲-----運用袖珍計算器猜謎》，原著者為美國的阿倫·哈特曼，由國內的鄒繼東、王遠琦編譯。書中系統地介紹了許多用計算器玩的數學把戲與遊戲，引領青少年朋友一窺數學的美妙，可惜是書相信已經絕版，不然會是數學老師的上佳教學輔助材料。

然而現成可參考的材料雖難找，但何妨自己根據實際教學需要設計一些借用計算器來引起好奇的教學方案。當然，如果可以互相交流這些教學方法，便可使它的內容日益豐富。

以個人的粗淺想法，運用計算器來引起學生學習數學的興趣，常有兩大法寶：一是故意使算題超乎計算器的計算能力，讓學生想想怎麼辦？另一是讓學生通過計算器發現數學的奇美景觀，從而為數學的魅力所吸引。試舉若干例如下：

其一：一般袖珍計算器只有八個數位，我們可以讓學生想像，像

$$356879213 \times 4927 = ?$$

$$161958500182 \div 271 = ?$$

這樣的算式，可以怎樣用計算器快捷地算出準確答案。

其二：不少袖珍計算器都只有四則運算，沒有開平方的鍵鈕。那麼，假如真要計算一個正整數的開平方時，應怎樣去算？

關於這個小難題，上述那本小書也提出了兩個方法，一個採用了高階等差級數的原理，另一個則使用類似平均數的方法。若想開拓學生的視野，還可以多介紹一些方法，例如連分數的方法便很富於趣味，它只基於下列等式

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}$$

然後計算漸近分數(即 $\sqrt{a^2 + b}$ 的小數部份的近似值)

$$\begin{aligned} \frac{Q_0}{P_0} &= \frac{b}{2a}, \\ \frac{Q_1}{P_1} &= \frac{2ab}{4a^2 + b}, \\ \frac{Q_2}{P_2} &= \frac{P_1 b}{2aP_1 + Q_1}, \dots \\ \frac{Q_n}{P_n} &= \frac{P_{n-1} b}{2aP_{n-1} + Q_{n-1}}. \end{aligned}$$

這些漸近分數逼近平方根真值的精確度通常相當於 P_n 的位數。

其三：像以下的一組算式：

$$\begin{aligned} 69115816 \div 803 &= ? \\ 66911581 \div 803 &= ? \\ 16691158 \div 803 &= ? \\ 81669115 \div 803 &= ? \\ 58166911 \div 803 &= ? \\ 15816691 \div 803 &= ? \\ 11581669 \div 803 &= ? \\ 91158166 \div 803 &= ? \end{aligned}$$

可以先讓學生猜想，有哪幾個式子會有餘數，然後著學生用計算器逐一算出商數及餘數（若有的話）。

當發現全部都能給803整除，便引導學生想想這看來很是神秘莫測的景觀背後，有甚麼的一番道理？又如何找其他這樣的被除數與除數？

其四：先在黑板寫下

1 2 3 4 5 6

再在 1、2、3、4、5、6 的下邊寫 3、6、2、5、1、4，即

1 2 3 4 5 6

3 6 2 5 1 4

著學生用計算器計算

$$13 + 26 + 32 + 45 + 51 + 64 = ?$$

$$31 + 62 + 23 + 54 + 15 + 46 = ?$$

$$13^2 + 26^2 + 32^2 + 45^2 + 51^2 + 64^2 = ?$$

$$31^2 + 62^2 + 23^2 + 54^2 + 15^2 + 46^2 = ?$$

$$13^3 + 26^3 + 32^3 + 45^3 + 51^3 + 64^3 = ?$$

$$31^3 + 62^3 + 23^3 + 54^3 + 15^3 + 46^3 = ?$$

如果是

1 2 3 4 5 6

2 4 6 1 3 5

情況又如何？由此現象我們會作甚麼推想？推想是否都對？

其實，計算器全民化地普及後，應該是有助於數學（或數學研究）的普及。但那要看看我們有沒有能力使學生常有想通過計器尋找些美妙數學奇觀的渴望。

猶記李學數在《數學和數學家的故事》第三集中所摘錄的讀者信內容說：「某天，我閒得無聊、悶得發慌時，拿起小型計算機玩，發現一些蠻有趣的東西……」顯見計算器是觀察和實驗的好工具，只在乎使用者能否善用。

和一切的科學研究一樣，在研究數學時，觀察和實驗是收集事實，獲取感性經驗的基本途徑，也是發展理論的實踐基礎。正如布爾巴基 (Bourbaki) 學派的靈魂人物 A. Weil 說：「當歐拉猜想到一個一般定理時，他會很高興，試圖去證明它。但是，如果找不到證明，而只有一些令人信服的實驗證據，他幾乎也會感到同樣的欣慰。」

設辦法讓學生有拿起計算器來發現些甚麼的衝動罷！

徵求封面設計

歡迎讀者為《數學教育》設計封面，令這本刊物能不時換上新裝。