

探究「斜」平行四邊形的面積

柯志明、程翠娟

引言

一般的小學教科書在引入平行四邊形的面積時，都會以圖一的方法，讓學生透過拼砌認識平行四邊形的面積等於「底 \times 高」。但這個拼砌方法對於如圖二般的「斜」平行四邊形就行不通了，可是教科書一般都沒有對這個情況作正面的討論。對「斜」平行四邊形避而不談，會令學生以為平行四邊形面積公式只適用於圖一的「標準」平行四邊形。也有可能令他們面對「斜」平行四邊形時，就算明知高的定義，也因「圖形局限所產生的壓力」(the pressure of figural constraints, 見 Fischbein, 1993) 而如圖三(a)、(b) 或 (c) 般錯畫平行四邊形的高。

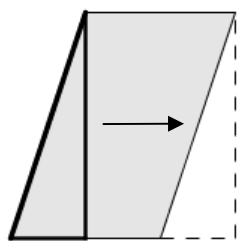


圖 一

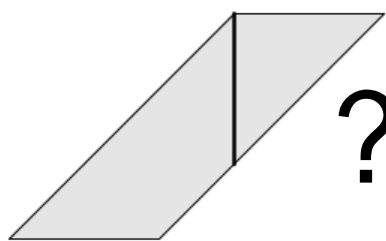
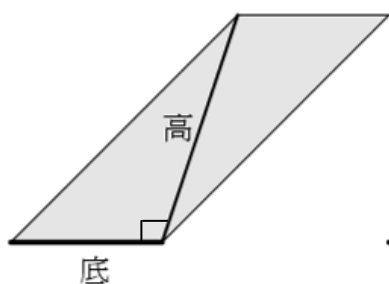
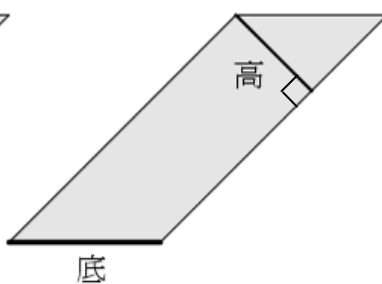


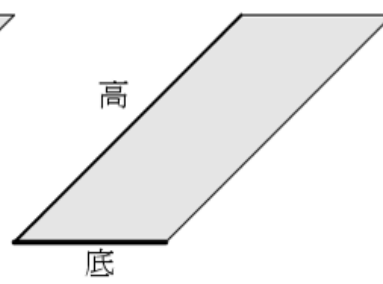
圖 二



(a)



(b)



(c)

圖 三

本文旨在介紹筆者們設計的一些學與教課業，透過數方格及動態圖形拼砌等策略，讓小學生認識無論多「斜」的平行四邊形，它的面積仍然是「底 \times 高」這個事實。

周界長，圖形大？

學生有時會誤以為一個圖形的周界愈長，面積就會愈大。為了幫他們釐清概念，我們設計了一個簡報，讓學生先觀察圖四的幾個圖形。然後老師可以提問學生：「以下四個圖形，哪一個的面積最大？為什麼？」我們估計，有學生會以為平行四邊形 H 的面積最大，因為它的周界是最長的。

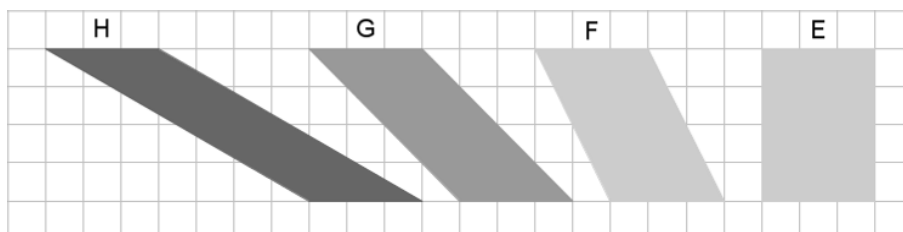


圖 四

寓探究於數格

我們接著設計一張工作紙，內有圖四的四個圖形（圖五）。學生可用數方格的方法求得每一個圖形的面積，從而發現原來所有的圖形的面積都是相等的。換句話說，平行四邊形的面積原來等於有相同的高和底的長方形的面積。

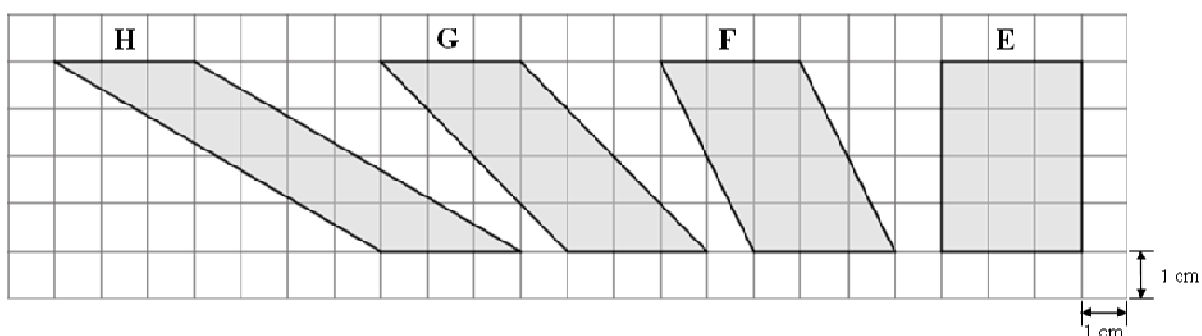


圖 五

這個活動的目的是讓學生透過數方格探究一般規律。以平行四邊形 H 為例（圖六），透過數算面積，學生會發現每行左邊實線部份都全等於右邊虛線的部份，從而得出平行四邊形的面積等於底（3 cm）乘以高（4 cm）。完成這個活動後，學生基本上已發現了無論平行四邊形有多「斜」，它的面積和一個有相同的底和高的長方形的面積是相等的。

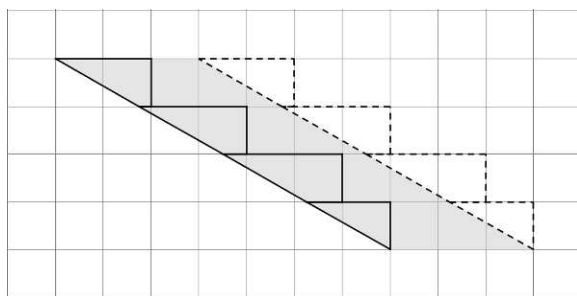
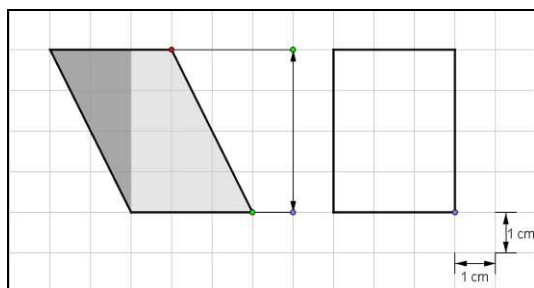


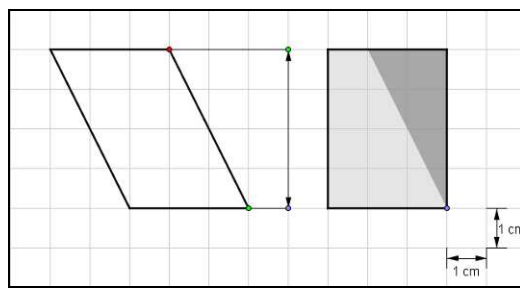
圖 六

回歸拼砌

最後，我們以 GeoGebra 設計了一個動態幾何檔案，讓教師向學生展示平行四邊形的面積等於「底 \times 高」這個事實¹。

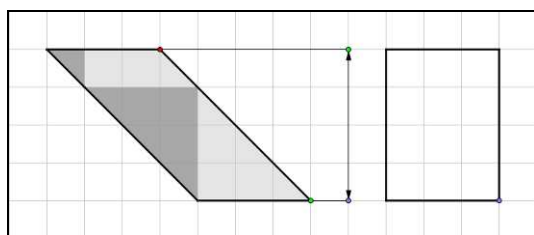


(a)

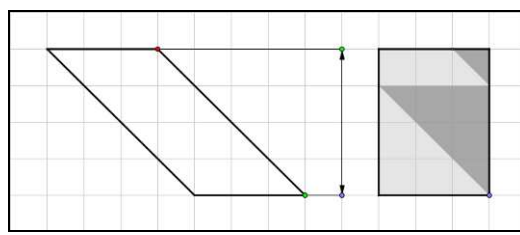


(b)

圖 七



(a)



(b)

圖 八

動態幾何檔案開啟後，電腦會顯示一個平行四邊形按鉛垂的方向被分成兩份（圖七（a））。教師可將每部份拖拉至右邊的長方形中，以展示平行四邊形的面積等於右邊長方形的面積，如圖七（b）所示。接著，教師可透過拖拉改變平行四邊形的「斜度」，電腦會將平行四邊形按鉛垂及水平的方向分割（圖八（a）），而這些分割部份恰好可以拼砌到長方形內（圖八（b））。

1 檔案的意念由天水圍天主教小學的吳禮昌老師提供，謹此鳴謝。

最後，教師按「結論」鈕，向學生總結大家的發現：平行四邊形的面積等於「底 × 高」（圖九）。

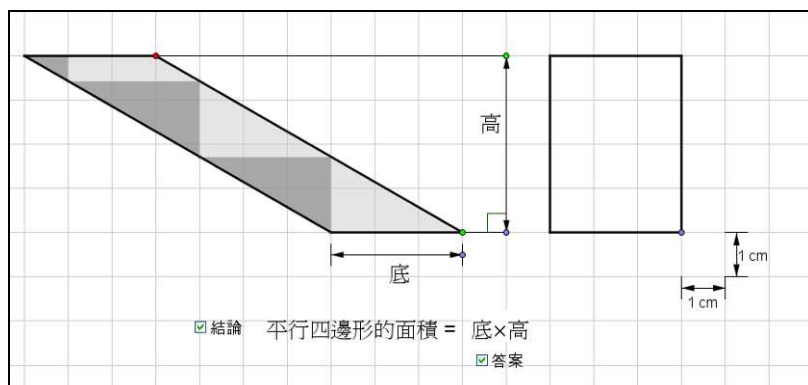


圖 九

結語：終極證明？

圖十是平行四邊形面積公式的一個「以圖為證」(Proofs without Words)：一張直角梯形的顏色紙放在一個和它全等的透明膠文件夾裡，將這張紙拉出，突出的平行四邊形部份的面積必定等於文件夾裡的長方形空位的面積。但筆者們覺得這個方法對小學生來說太過抽象。也許，當學生們經過本文的數方格活動及動態圖形拼砌後，對平行四邊形的高和面積有了充份的理解，圖十就會變得較為「實在」，可以作為對平行四邊形面積公式的一個「終極」證明了。

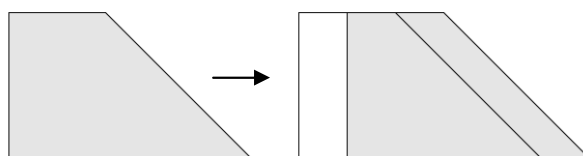


圖 十

各同工若有興趣使用本文的簡報、工作紙及動態幾何檔案，可於以下教育局的網上學與教支援網址下載。

http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/bcalt/math/KS2_new/KS2-M7-3/KS2-M7-3-f.htm

參考文獻

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational studies in Mathematics* 24: 139 – 162.

作者電郵：orchiming@gmail.com