

數學化過程與數學理解¹

黃毅英

香港中文大學課程與教學學系

數學化過程：從一個問題談起

最近收到小學老師如下的一道問題：6 元分給 5 個人，何以「 $\frac{6}{5}$ 元」這個答案會比「 $6 \div 5$ (元)」好呢？筆者認為這不只是因為格式的緣故，而是在數學上，後者仍處於運算階段，前者則是一個實數。雖然筆者仍傾向寬鬆處理（見黃毅英，2006），但老師應對這些數學理念有所認識。這牽涉到一個「數學化教學」的想法，就是教數學時應充分考慮數學的內涵與觀點。這亦是對數學教師的一個要求。事實上，「數學化」這個觀念近年在本地不斷得到提出（馮振業，1999，2004；黃家鳴，2000；黃毅英，2002；黃毅英、林智中、孫旭花，2006，頁 20 – 24：數學的本質；黃毅英、黃家樂，2001，頁 60 – 65：3.4 數學本質和數學教育部本質問題），但究竟「數學化」這個口號背後有些甚麼含意？筆者認為「數學化」起碼有兩個面相。

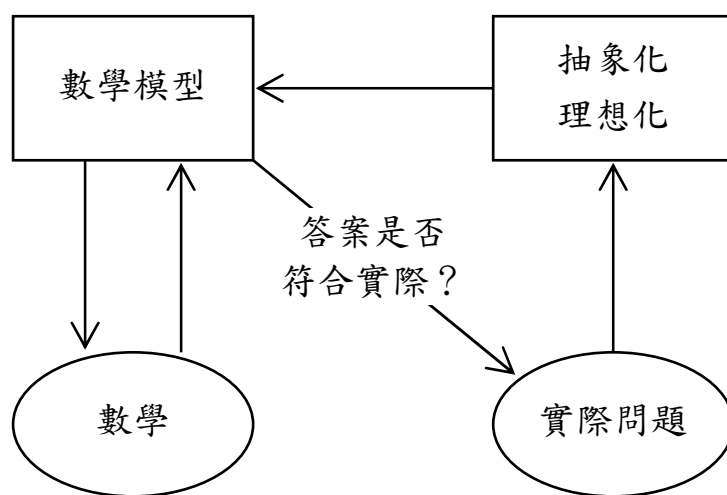
首先，「數學化」可以看成是一個形容詞，就是如上面的例子般，數學教學要多點從數學角度考慮問題，數學教學要「數學化」一點，顯然這是理所當然的，這也應是數學教師的一個基本素養。

此外，筆者更關注的是「數學化」(mathematisation) 作為一個動詞、一個過程和一道學生數學成長的進程。我們若參考 Freudenthal (1991) 的解說就清楚不過了。在 1.3 節（頁 30 – 44）就用了 mathematising 這個動詞作標題。Freudenthal 首先指出，這個觀念不是由他發明的，在數學界流傳已久，不過有時用不同的詞彙表達這個意思吧了。這個詞彙所描述的是從現實處境出發，逐漸「修輯」（就是蕭文強，1978 所指的抽象化、理想化）成數學體系中內容的一個**過程**。他繼續用了不少例子論述數學化與設基化、形式化、圖式化 (Schematising) 有著密切的關係。他還特別提出建模和尋找關鍵 (looking for essentials) 兩點（頁 31 – 36）。（接著他提出了「橫

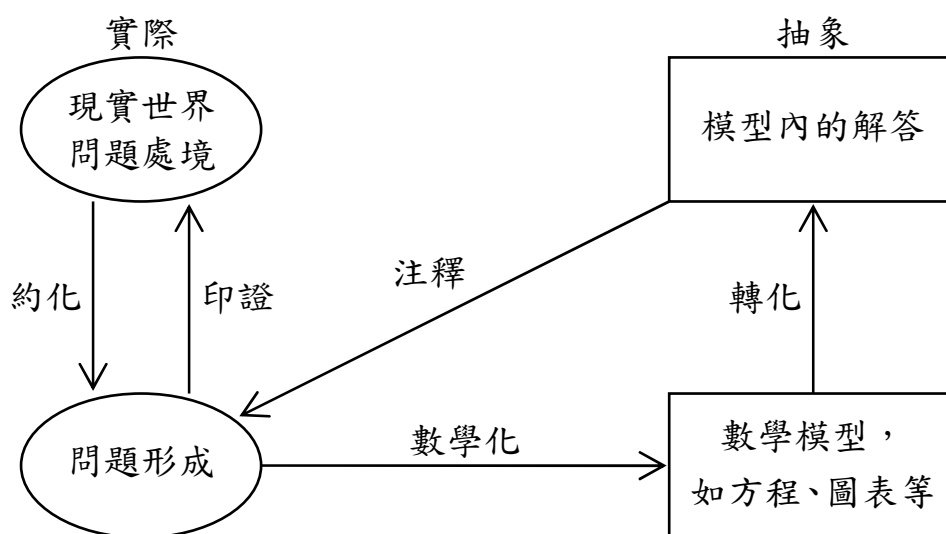
1 本文得蕭文強教授、許慧貞女士、吳丹女士及編輯梁子傑先生提供資料及有用之意見，黃民建先生盡心協助文書處理，謹此一併鳴謝。

向數學化」與「縱向數學化」的觀念，詳見頁 41 – 42，或黃家鳴，2000）。

蕭文強（1978）從另一個角度探討類似的觀念。他從數學歷史的發展過程中，提出數學發展源於生產實踐、數學發展從感性認識深化為理性認識、數學發展是從具體到抽象和數學發展是從「歸納」到「演繹」等。而由於數學的發展過程在某程度上與學生學習的過程類似（Siu & Siu, 1979），以上結論也給數學教學作出了啓示。書中亦特別提到數學建模的觀念（圖一）。但從上面 Freudental 的表述，數學建模不只是一種數學方法，而是一種數學化過程。這在 NCTM（1989）中得到印證，在這份文件中清楚說明建模就蘊含了數學化的過程（見圖二）。



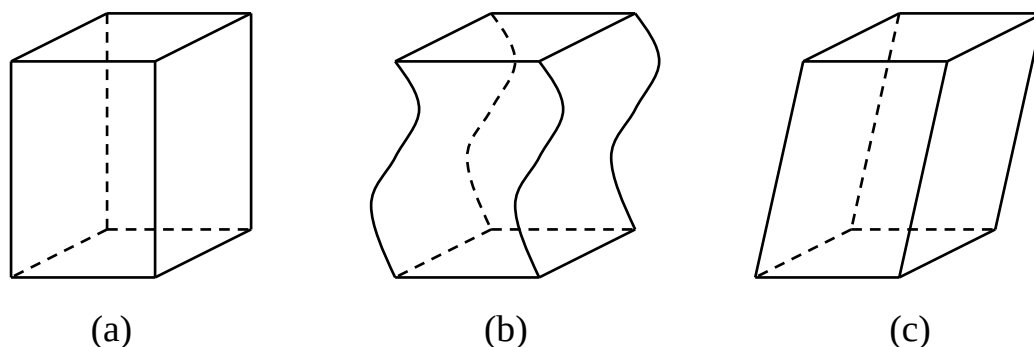
圖一：數學建模。來源：蕭文強（1978），頁 108。



圖二：數學建模與數學化。來源：NCTM (1989)，頁 138。

換言之，「數學化」不只是數學學習的一個主要目的，這也是一條漫長的（由小學到中學甚至大學）由具體到抽象、由歸納到演繹之路，最終學生懂得將世界現象數學化（作為動詞）去形成各種概念，並將各種問題在數學系統中加以解決，就如《數學課程全面檢討報告》中 5.2 段所說：「數學課程的設計，應透過課程內容所傳授的知識，培養學生的數學意識，及使他們逐漸能夠以數學概念，解釋在日常生活及其他學科所遇到的現象和問題，更可運用數學語言表達這些問題，並以數學方法解決及作出數學上的解釋。」（全面檢討數學課程專責委員會，2000，頁 24）。

在教學而言，數學教師應有這雙重的素養，就是具備一定的數學學養，使其教學相當數學化（作為形容詞），與此同時，透過種種教學技巧，善於為學生鋪排一條數學化（作為動詞）過程之路。最近接觸到了不少小學數學的事例就可表明這點，例如甚麼是柱體。我們當然可以找到其數學定義（如見 Wikipedia、Answer.com 等）。在遇到這些問題時，不少老師都會嘗試找數學界的定義，希望「一鎚定音」，不過值得注意的是，一些名詞就算在數學家之間、數學書籍之間亦不一定統一， 0 是否自然數便是一例（見黃毅英，2005a, b）。不過，縱然找到公認的定義，學生還是從感觀出發（這是理所當然的！），柱體就是「好像一條柱、筆直的立體」。讓我們先看看圖三。



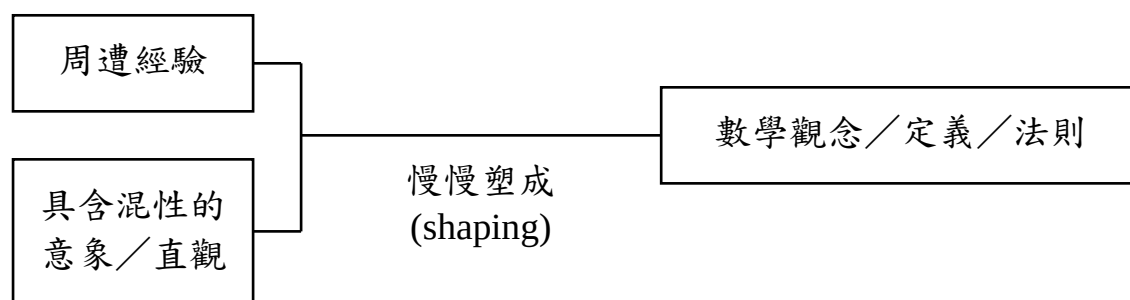
圖三：柱體抑或只不過是「具有均勻橫切面的立體」？

顯然，圖三中的立體都是「具有均勻橫切面的立體」，其中 (a) 肯定是柱體，(b) 不是柱體，但 (c) 又如何呢？

無論如何，確切的定義可以翻查書籍或網上資料，這是老師所應該自我裝備的。這也就是我上面所說的「數學化」的第一個面相（即多點從「數學的角度」去考慮問題）。

但是這明顯不是故事的終結，在教學上只認識正規的定義並不足夠，因為就算我們找到了正規的定義，不可能也未必須向學生交代，只是老師自己心裏有個底（自己不會搞錯）吧了。何以不可能呢？原因是定義往往太深，無法向學生解釋（尤其當我們面對的是小學生）。其實縱使在高中程度，理論上已到達符號化演繹的階段，對於一些觀念如極限等，我們依舊無法向學生介紹正規定義，只能透過直觀及各種例子推演出（只屬「說服」）一些基本性質，再由這些基本性質出發，進入接下來的種種邏輯演繹（見馮振業、黃毅英，1997）。

此外，正規的定義也是不必要的。何以不必要呢？從數學的歷史發展中觀察，我們認識到數學有實際生活／勞動實踐的根源，故此列出了定義不等於解釋了概念，證明了定理也不等於真正的理解。數學教學恰恰就是要為學生搭建這條由具體到抽象的數學化之路（黃毅英，2007a；蕭文強，1978；又見 NCTM，1989，頁 138；黃毅英、林智中、孫旭花，2006）（圖四）。



圖四：數學化的過程

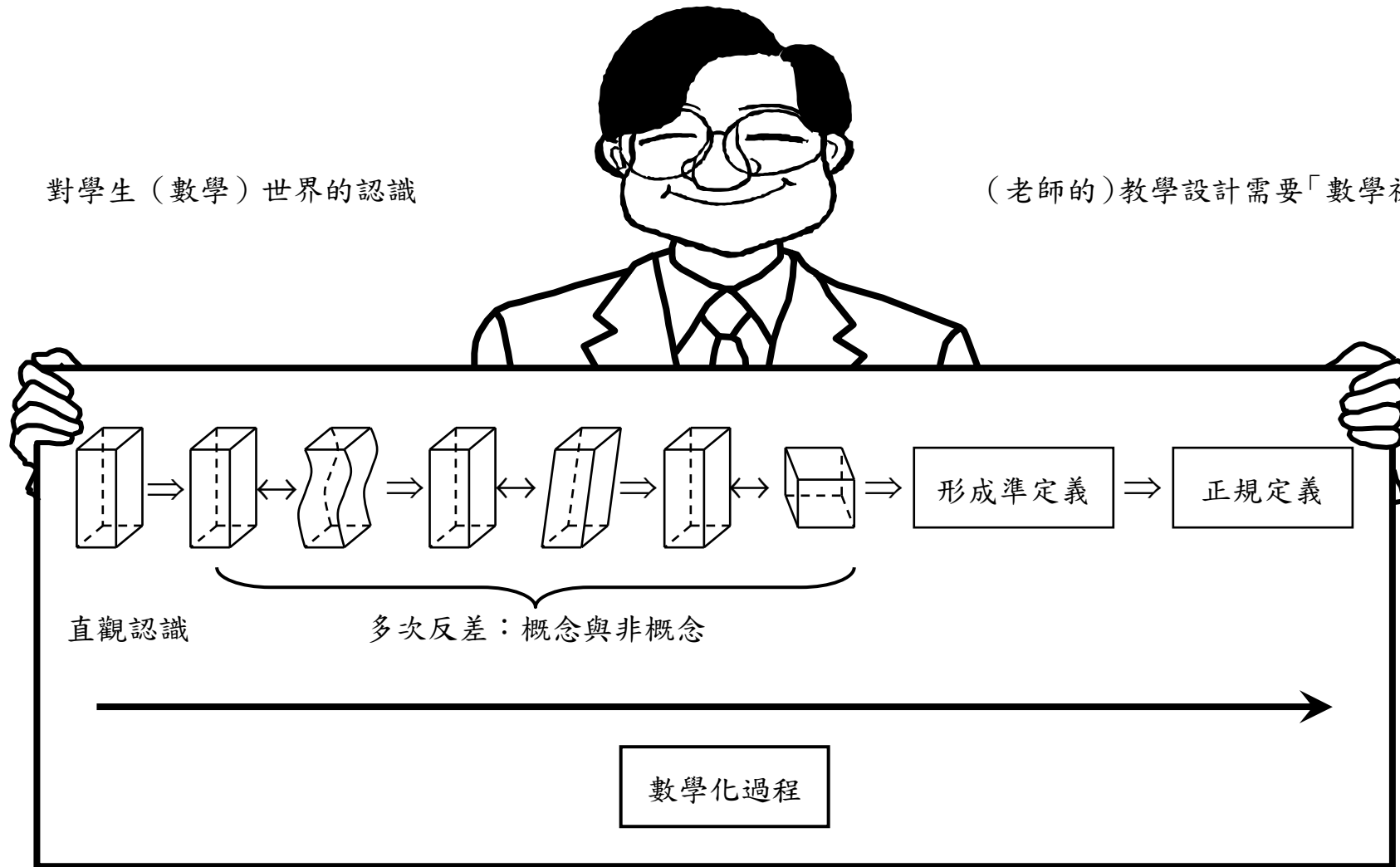
由此觀之，從學習的角度思考，學生在學習初期所認識的柱體也會如圖三 (a) 般認為柱體是「好像一條柱，筆直的立體」，這乃是自然不過的事。所以小學生這麼答，在某意義上，也應予以接受。但明顯地，這是流於直觀（視覺等感觀上）的認識。在探討如何把這個經驗慢慢塑成進階的數學概念時，除了要求教師的數學素養外，教師認識學生內心的「數學世界」深度和其教學技巧的熟練程度等，都是值得關注的。

這些教學手法多不勝數，沒有一個範本。比如「例子 —— 非例子」、「概念 —— 非概念」等手法就可協助鋪排這個數學化過程。而至於正規定義可能要到中學（甚或大學）方可完成，故此數學化過程可以是一條很漫長之路。

對學生（數學）世界的認識

（老師的）教學設計需要「數學視角」

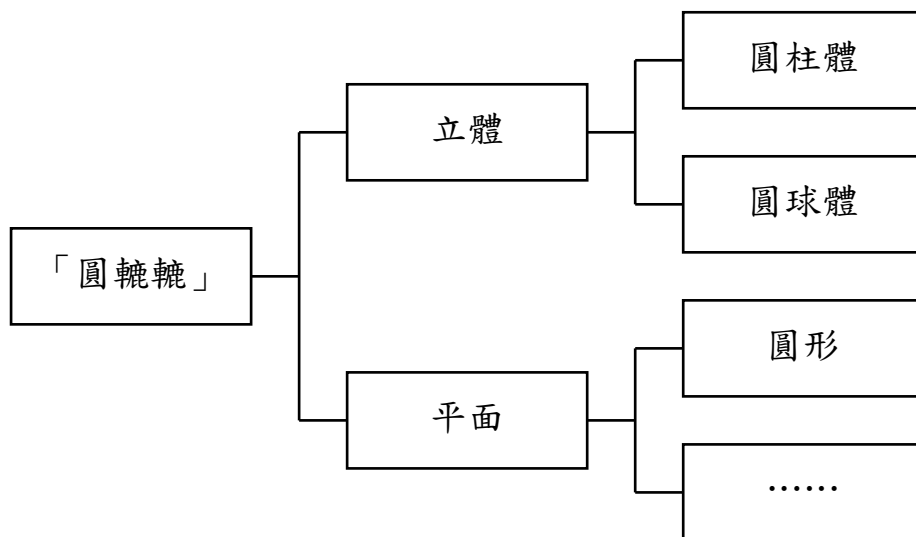
9



圖五：數學化的老師和數學化的過程

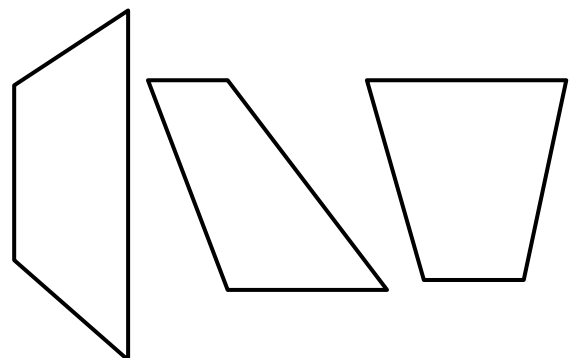
所以學生有各種粗糙的定義是不足為怪、也無須遏止（誤解 *misconception* 往往是達至正確瞭解中不可避免的），老師作出有效的引導就是了。總的來說，數學老師當然要對數學有一定的素養，這才能多點從數學的角度佈置教學。與此同時，他亦須深入了解學生的內心數學世界。不過這是不足夠的。教師還須善巧地為學生搭建由學生世界到數學世界之路，這才是數學化的教學歷程（圖五）。

故此學生說圓柱體、圓球體、圓形均是「圓轆轤」的，十分正常。老師只須意識到學生世界和正規數學概念在學習初段的必然差距，並引導學生漸漸由前者過渡到後者。而至於數學概念的形成，教育心理學家有不少建議。例如，Ausubel 所提的「漸進分野」（*progressive differentiation*）及／或「綜合性重組」（*integrative reconciliation*）都是一些好的辦法，於此不贅（見 Bell, 1978）（圖六）。

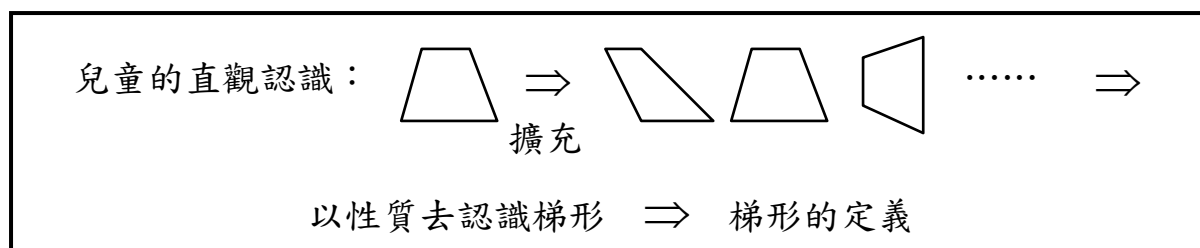


圖六：漸進分野

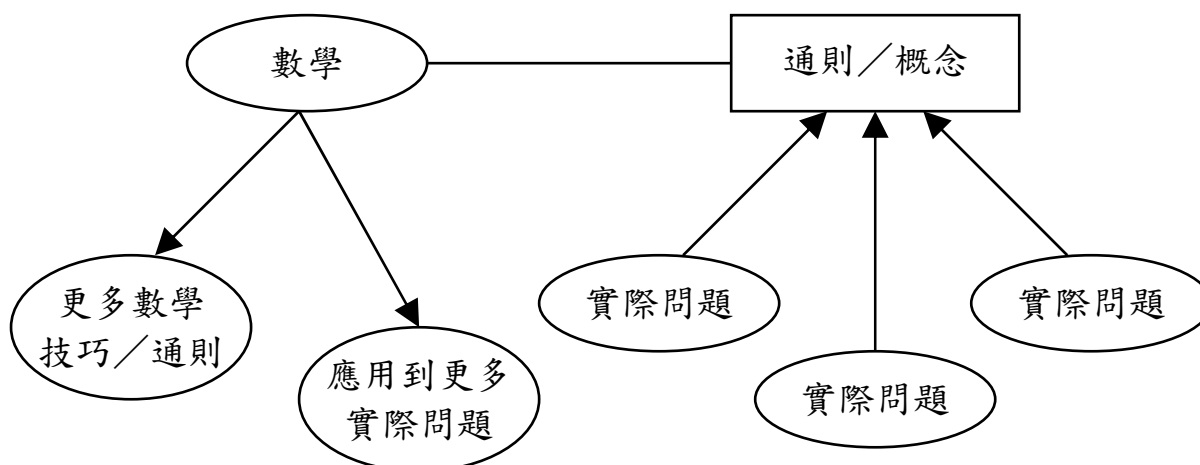
又例如黃毅英（2007b）所指出，學生認為圖七所顯示的不是梯形是很正常的。因為他確實未見過這樣的梯子。反過來說，你可以說，數學中把這些形狀歸作梯形是不「自然」的、人工化的，而人工化、理想化、簡單化往往是數學之潛能所在，因為透過這種建模過程，才能把數學應用到更多的處境中（圖八、九）。



圖七：兒童經常不太確定的梯形

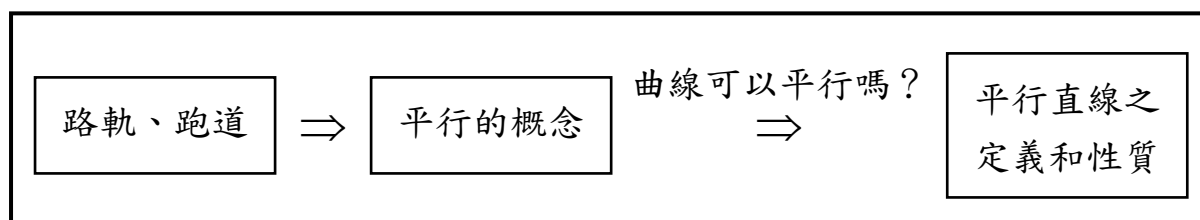


圖八：從直觀到定義



圖九：透過建模把數學應用到更多的處境。

修改自黃毅英、林智中、孫旭花 (2006)，頁 28。



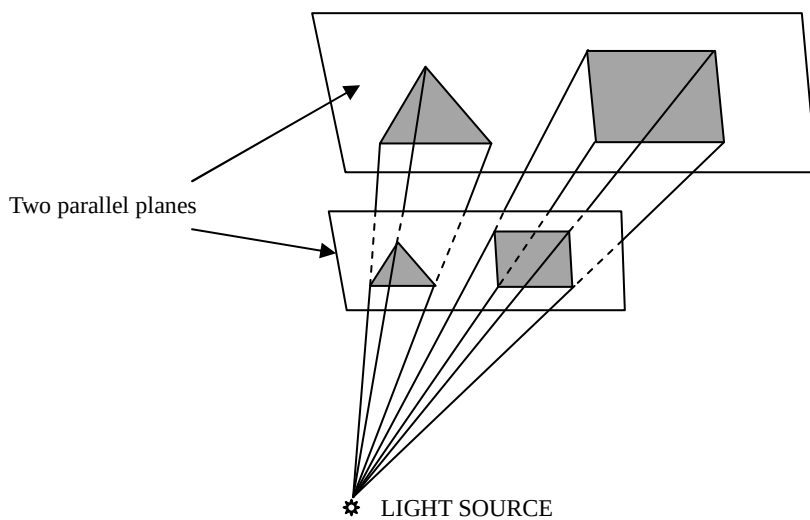
圖十：曲線可以平行嗎？

其他例子不勝枚舉，如平行曲線（雖然有人曾作定義，例見 <http://mathworld.wolfram.com/ParallelCurves.html>，但在一般學校數學的處境中只會局限於平行直線或平行線段）等（圖十）。

相似形狀又是一例。除了上述所說的「由學生世界到數學世界」的基本教學進路外，相似的正規定義基本上較難在中、小學階段交代。有些書用「伸縮」(dilation) 的方式定義²（見圖十一），但由這個定義推導其他相

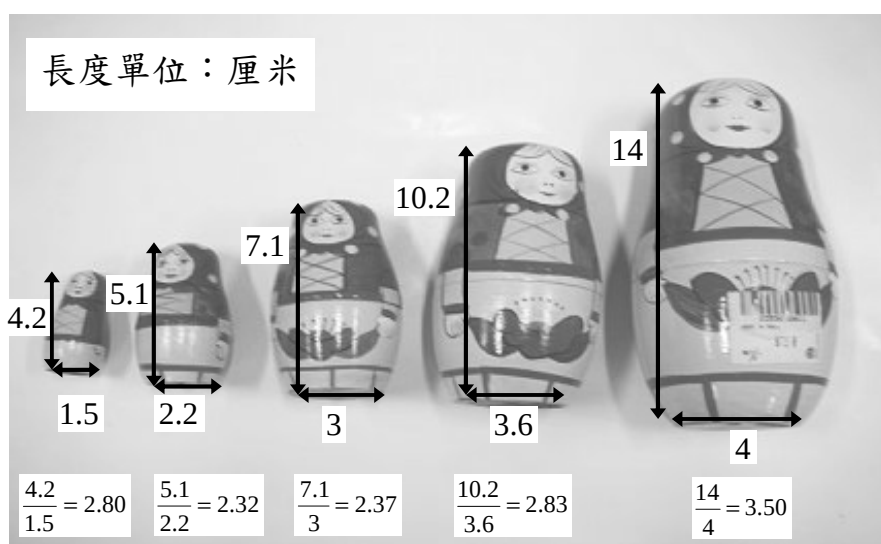
2 對於兩空間中的（立體）圖形 A 、 B ，若存在一雙射 $f: A \rightarrow B$ 及空間中的一點 O ，

似圖形的性質殊不容易（見黃毅英，2000）。《原本》亦要在卷五討論比例理論後分開於卷六及卷十一才正式定義相似平面及立體直線圖形。在一時無法交代定義之情況下，我們「只能」（實非壞事）透過大量的例子（及非例子）歸納出一些性質（圖十二至圖十五）。由這些基本性質作出種種操作和運算，到適當時間才能反回正規的定義。這種情況實屬常見。極限（在無法有正式定義）的引入便是只一例。詳見馮振業、黃毅英（1997）（見圖十六）。



圖十一：以「伸縮」定義相似。

來源：Chan, Leung & Wise (1988)，頁 86。



圖十二：看似相似的形狀在數學上其實並不相似！

使得 A 中任一點 P ，不只 O 、 P 、 $f(P)$ 皆連成一直線（同一方向），且 OP 、 $Of(P)$ 有恆等之長度比，則 A 、 B 乃為相似。



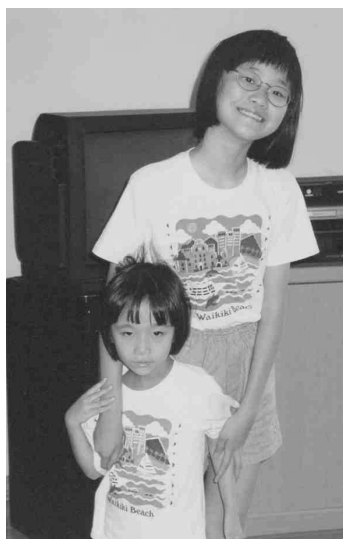
$$\frac{22.64}{15.1} = 1.5$$

$$\frac{5.4}{3.6} = 1.5$$

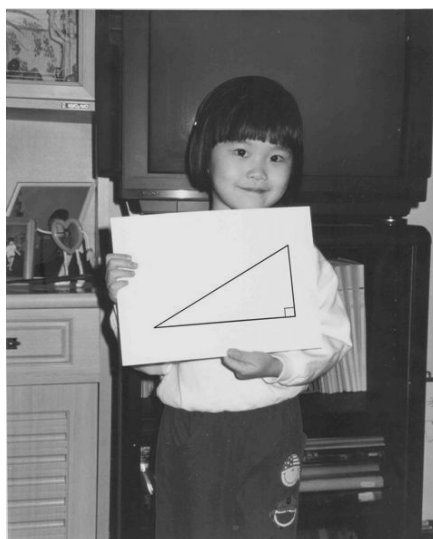
$$\frac{4.2}{2.8} = 1.5$$

比例 = 1.5

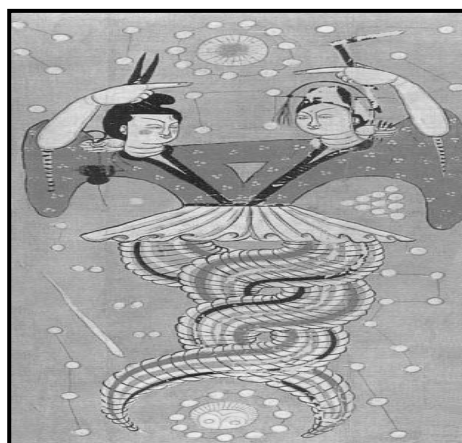
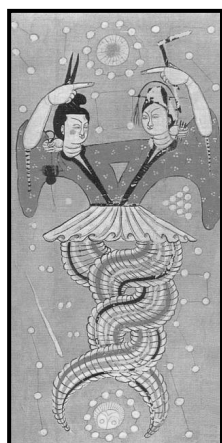
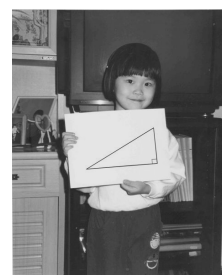
圖十三：形狀相似且數學上也相似！



(a) 姊妹容貌在數學上不相似

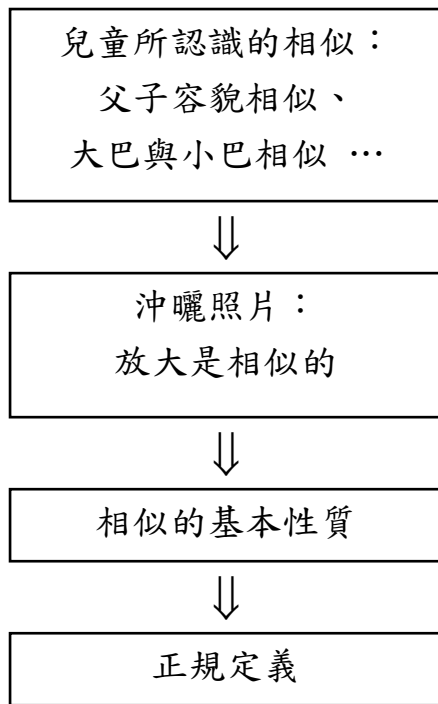


(b) 照片放大則肯定相似

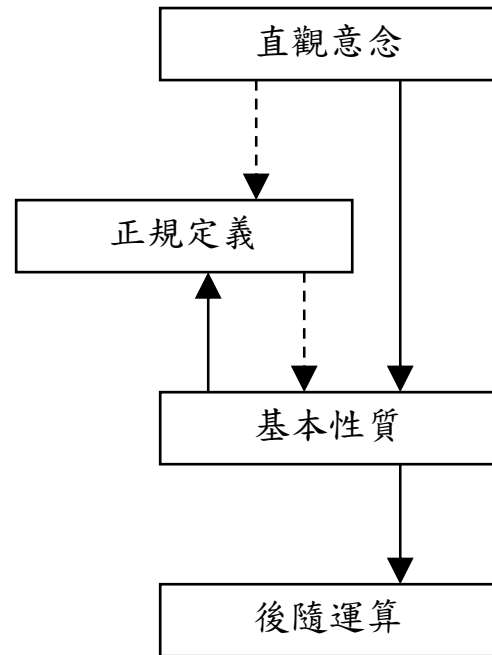


(c) 插圖高度不變但闊度改變在數學上不相似

圖十四：相似不相似？



圖十五：相似形狀



圖十六：繞過正規定義之概念形成

在歷史上，不少正規定義與數學概念的形成亦非一蹴而就，故此 Siu & Siu (1979) 也提出「在製造過程中的數學」(mathematics-in-its-making) 和「作為成果的數學」(mathematics-as-an-end-product) 的分別。總的來說，定義不等於理解。我們往往要反過來從各種示例和不同角度的理解最終修整到正規的定義。

理解和多重表徵

近年有提出多重表徵可讓學生有豐富的理解。故此分數同時有代數、算術、圖像等表示，這當然是好的。但這也帶來其他技術上的問題，例如一個概念應提供多少表徵？加了圖示是否就等於理解豐富了？反過來看，能說只知算式的學生就是不太理解相關的概念嗎？學生只有其中的一些表徵是否算未能完全理解？甚麼叫完全理解？表徵有多「真實」？……。這些問題以前在其他文章談過，於此從略（黃毅英，2003；2004b）。

返回根本的問題：甚麼叫「理解」？Skemp (1977) 的經典著作把「工具性理解」(instrumental understanding) 和「關係性理解」(relational understanding) 分野開來。亦有學者提出「程序性知識」(procedural knowledge) 及「概念性知識」(conceptual knowledge) (見 Hiebert & Carpenter, 1992) 等。Skemp 甚至認為「工具性理解」只屬不求甚解，算不

上甚麼理解。但似乎 Skemp 並沒有很清楚的表述甚麼叫「關係性理解」，只是貶低「知其然」(knowing how)而強調「知其所以然」(knowing why)。甚麼是「知其所以然」呢？Sfard (1991) 的文章指出操作法則是「概念」的不可分割的一部分，換言之，「知其然」不是那麼的一文不值，而且透過前者會加深後者的認識（林彪所說的「從執行中加深理解」）。

讀 Hiebert & Carpenter (1992) 的文章有所啟發。他們承接前人的想法，理解不一定有一個最終典範，而深淺與否看個人在概念與概念之間的關聯有多緊致（「關係性理解」嘛！）（如 Resnick & Ford, 1981 已有提出類似想法³）。這種概念網路並不、不必，也不可能統一，有些人可以是蛛網狀，有些可以是其他形式的脈絡（姑且如此說——因為畢竟我們不會假設人的腦袋裡有這麼的一些網絡！）。如果我們接受這個觀點，那麼就可看到多重表徵的一個新觀點（其實一點不新）。多重表徵的提供還只不過給出一些誘因讓學習者形成內在表徵吧了！這個內在表徵沒有統一版本，因人而異，故此我們不是「教」分數的圖像表示，也不是透過分數的圖像表示讓學生建立既有的、統一的內在表示，而是讓學生建立屬於自己的內在表徵（這其實是建構主義的一個基本想法，見黃毅英 2004a）。

Star (2005) 及 Baroody, Reil & Johnson (2007) 年的文章印證了筆者的一些想法。他們均指出「程序性知識」中也有深層 (deep) 的，而「概念性知識」也有表層 (superficial) 的。只不過我們比較常用表層的「程序性知識」和深層的「概念性知識」吧了。而深淺的其中一個重要判斷是連繫程度 (connectedness)。

知識類別	知識質地	
	表層	深層
程序性	常用之程序性知識	?
概念性	?	常用之概念性知識

表一：程序性與概念性知識之類別與質地（譯自 Star, 2005, 頁 408）

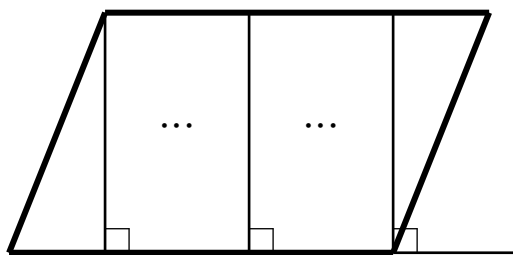
3 「關係性理解」又見 Biggs, J.B., & Collis, K.F. (1989). Towards a model of school-based curriculum development and assessment: Using the SOLO taxonomy. *Australian Journal of Education*, 33, 149 – 161.

除了知識和記憶提取外，在實際處理數學題又有甚麼分別呢？打個比方，做一道普通的除法，數學家、老師和數學不太差的學生做下去可能都是一樣的。數學家做分數除法也可能只是「無意識」地運用「顛倒法則」。他也不會煞有介事的畫個圖去「理解」、再去運算（而且，能用圖解也不代表有「真正」的理解）。所不同者之一，是當這些慣常做法（Kerkman & Siegel, 1997 所說的「最快策略」fastest strategy）行不通時，他們有能力「回到原點」發掘「後備策略」（backup strategy）。例如除就有很多種，也會對外在不同處境的建模，如分物、「包含」（這些其實是除對現實處境的建模）、乘的逆（求 x 使得 $ax = b$ ）、整數除、分數除、小數除、代數符號除、多項式的除、分式及根式除、複數除等等。在一般情況下，我們只須將除法的法則套用到不同處境。但例如從「普通」除法轉到 $3 \div \sqrt{2}$ 、 $7 \div (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 、 $(3 + 2i) \div (1 - i)$ 、 $(x^2 - 1) \div (x - 1)$ （ x 可否等於 1？）……就要尋根究底考察除的本質和相關的「後備策略」了。

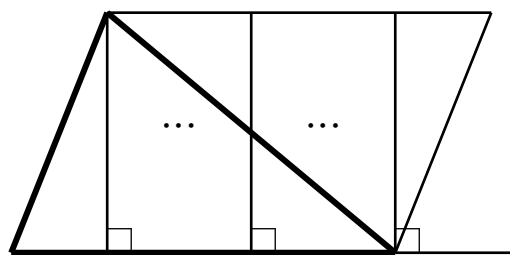
學習心理學發現，當問題解決者在慣常做法行不通時，除非就此放棄，否則這種「阻滯」會迫使他們找尋統攝「低階法則」的「高階法則」（Scandura, 1977；見黃毅英，1990）。在這個過程中，問題的「變化」可能扮演一定的角式。例如學生明白了二次方程的求根公式後，可讓學生解 $x^2 = 6x - 7$ 、 $(x - 2)^2 = 6x^2 - 5$ 、 $x^3 = (x + 1)^3 - 8$ 等等。

數學本質與數學味道

顯然，教師對數學本質的認識是數學教學的其中一個關鍵。現以最近接觸到一個有趣的問題加以闡述。有問及平行四邊形有多少條高？（圖十七）。一般說法是有無限條高。於是有人說，三角形也有無限條高，理論上我們很難說這是錯的（圖十八）。不過，我們可以進一步問究竟「高」是指甚麼？「唯一」、「相同」、「不同」（因為要數多少個）在幾何上又是甚麼？舉個例說，平面幾何以長度及角度為決定圖形，不管其位置（variant/invariant）。

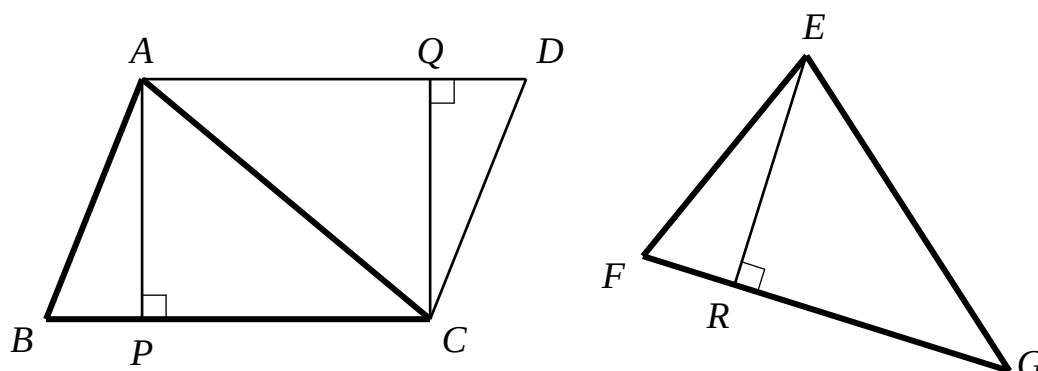


圖十七：平行四邊形有無限條高



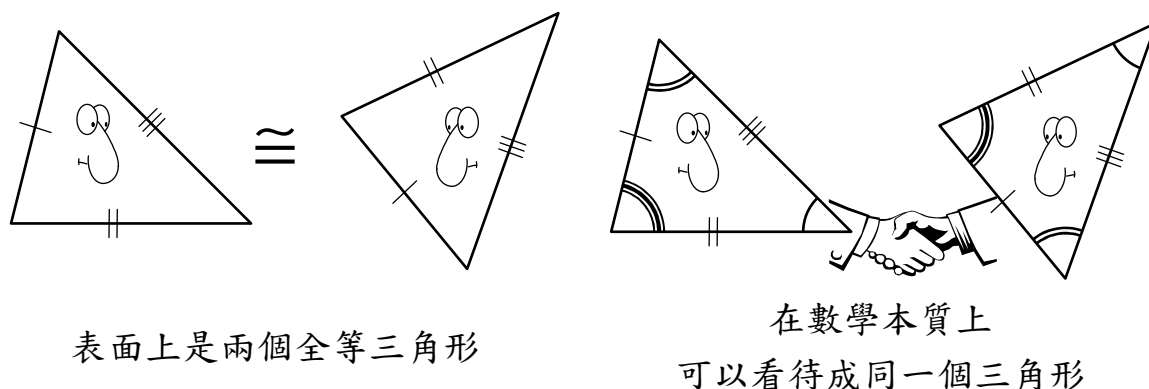
圖十八：三角形也有無限條高？

讓我們再看看圖十九， AP 為 $\triangle ABC$ 的高， QC 又是否 $\triangle ABC$ 的高？若說是，那麼若 $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ，我們又可不可以說 ER 是 $\triangle ABC$ 的高呢？



圖十九：怎樣算有多少條高？

教得有「數學味道」未必如許多人想像中的那麼困難或太費時。再舉一例：最近與老師討論，「SSS」等全等條件不只關於兩個三角形（全等）的問題，亦是關於單一三角形的問題，就是若一個三角形知道了「SSS」，這個三角形就決定了。有老師認為對於這件事學生難以理解。但其實兩個三角形有了「SSS」，就有全等三角形的對應角相等，換句話說，這兩個三角形就完全一致。沒有分別的、唯一的（又是上面關於幾何上有多少個的問題！），表面上兩個（全等）的三角形其實在本質上可以看待成為只有一個（圖二十）。這件事不是說明「三角形已完全決定了」還有甚麼呢？

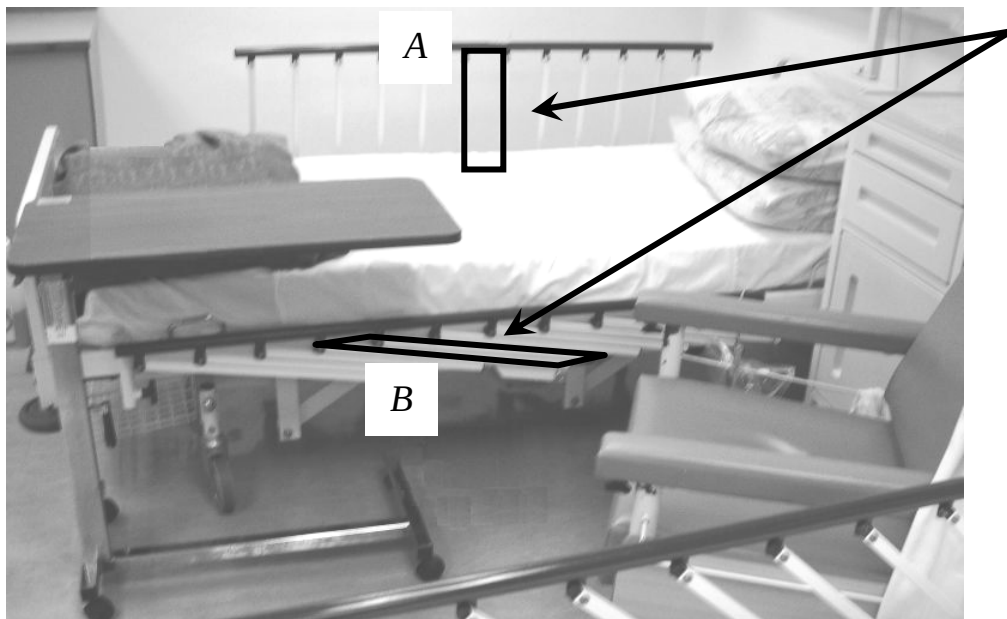


圖二十：只有「一個」三角形

再進一步，還可以讓學生看到所謂「最少定義條件」（minimal defining property）的問題（Fung & Wong, 1997）。亦即 SSS（其他 SAS 等類同）不只是決定了三角形。還有，三個數學特徵是最少的了，亦即不可以減到

SS 之類。

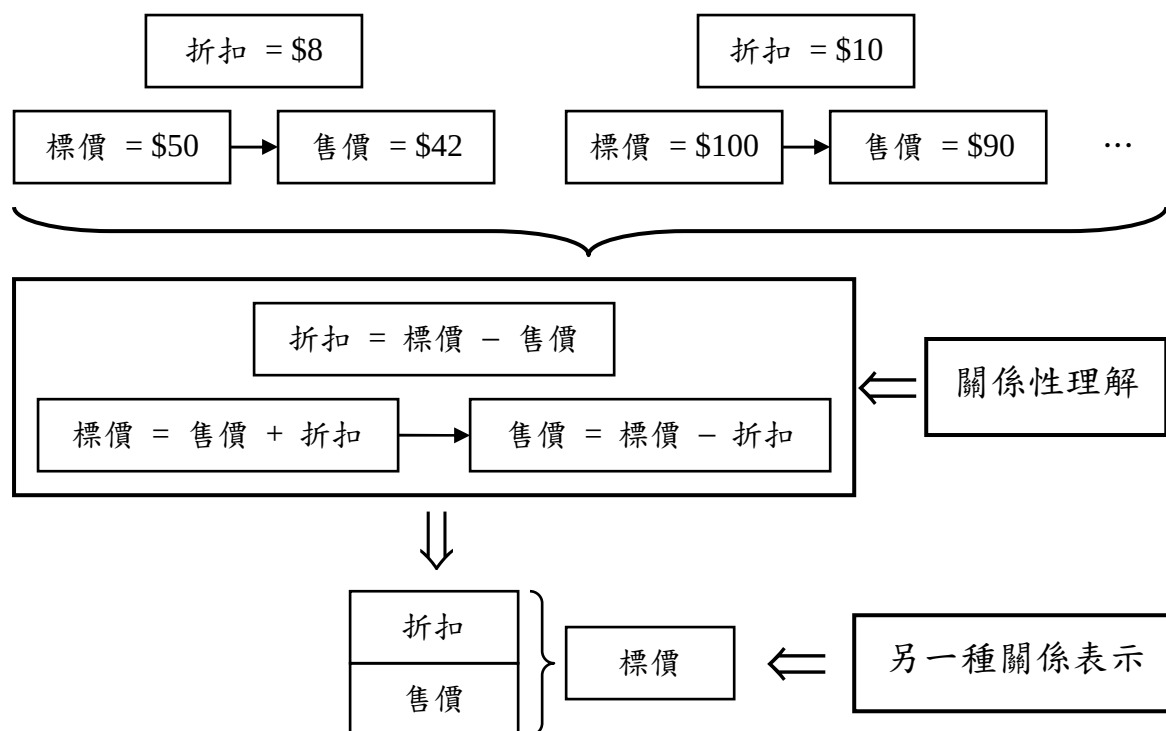
還有，由於 SSS 決定了三角形，所有角都定了。這與四邊形不同，雖然有了「SSSS」，角仍可以變。換言之，三角形的三邊相等一定是等邊三角形（「正三角形」regular 3-gon），而四邊相等的四邊形不一定是正方形（正四邊形）。故此三角形是「穩固」的支架結構而其他多邊形均不是（見圖二十一所舉的是四邊形之例）。



圖二十一：四邊形並不「穩固」（位置 A 及 B），但伸縮性也有其實際作用

這不只是一種數學味道，表達了數學的原意，而且把全等概念、決定性、三角的穩定結構、最少定義條件連繫起來。這就是所謂的關係性理解（亦可以說是「連繫」的其中一種體現，見 House，1995）。

又例如百分比。學生如能從各種百分比（折扣、賺賠、折舊…）中看到原量百分比及新量之間的關係，他們就可以揮灑自如地處理問題。例如當知道其中兩個量時可以算出餘下的一個量（其他百分比增減類似）（圖二十二）。又例如能否讓學生看到外心（circumcentre）、圓心垂足等分弦、三點決定一圓（當然三點不共線、不重疊），但四點不一定決定一圓（除非圓內接四邊形）的關係？其他例子不勝枚舉。



圖二十二：通則與關係性理解

結論

數學化教學並非只求將數學的嚴謹性及技術性層面的數學一股腦兒放進數學教學，而是搭建由兒童周遭經驗到正規數學之路。要做到這點，老師要返回兒童對數學那種粗糙理解的層面，由他們的認知世界作起步點。此外，教師則對數學內容本身不只要「熟」，還要「通」。透過種種教學手法讓學生建立起數學意識和關係性理解。我們在提出「學養教師」一文(Siu, Siu & Wong, 1993)中便指出他必須「對數學、教育及學生性向均能掌握」(頁 54)。這樣很難嗎？其實只要有「處處留心皆學問」之心，要達到這個境界雖不至一蹴而就，亦非遙不可及。子曰：「為仁由己，而由人乎哉？」

4
」

參考文獻

- 全面檢討數學課程專責委員會 (2000)。《數學課程全面檢討報告》。香港：香港課程發展議會。
- 馮振業 (1999)。數學化教學：從夢想到現實。載黃毅英、黃家鳴 (編)。《基礎數學教育的優化研討會論文集》(頁 4 - 46)。香港：香港中文大學教育學院課程與教學學系。

- 馮振業 (2004, 6 月)。數學化教學：理論、實踐與前瞻。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)。《香港數學教育會議 — 2004 論文集》(頁 78 – 88)。香港：香港大學教育學院。
- 馮振業、黃毅英 (1997)。極限的故事。《課程論壇》第 7 卷第 1 期，102 – 105。
- 黃家鳴 (2000)。現實情境作為數學學習的起點：荷蘭經驗。《數學教育》11 期，34 – 46。
- 黃毅英 (1990)。解題與數學教育。《數學傳播》54 期，71 – 81。後載黃毅英 (編) (1991)。《邁向大眾數學的數學教育》(頁 59 – 82)。台北：九章出版社。
- 黃毅英 (2000)。「相似形的角和相似比」的教學構思。載張奠宙 (編)。《點評本數學素質教育教案精編》(頁 377 – 402)。北京：中國青年出版社。
- 黃毅英 (2002)。數學學習 —— 由生活到數學化的道路。載黃顯華、朱嘉穎 (編)。《一個都不能少：個別差異的處理》(頁 299 – 306)。台北：師大書苑。
- 黃毅英 (2003)。《數學教育實地觀察 – II》。香港：香港數學教育學會。
- 黃毅英 (2004a)。從兩岸數學教育改革略談建構主義。《數學教育》18 期，23 – 25。
- 黃毅英 (2004b)。香港數學教育論題謫議 —— 第三份「另類報告」後篇。《數學教育》19 期，22-33。後載《朗文教育專訊》9 期，9 – 20 (2005)。
- 黃毅英 (2005a)。自然數的歷史。《朗文教育專訊》8 期，6 – 9。
- 黃毅英 (2005b)。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》8 期，10 – 11。
- 黃毅英 (2006)。「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」。《數學教育》23 期，27 – 36。
- 黃毅英 (2007a)。三次數學危機 —— 個人認知與體會。《中學數學教學研究》。2/2007，7 – 10。
- 黃毅英 (2007b)。教學隨筆：500 是奇數，501 是偶數！。《數學教育》24 期，31 – 33。
- 黃毅英、林智中、孫旭花 (2006)。《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》。香港：香港中文大學教育學院香港教育研究所。
- 黃毅英、黃家樂 (2001)。「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啓示。載黃毅英 (編)。《香港近半世紀漫漫「數教路」：從「新數學」談起》(頁 9 – 111)。香港：香港數學教育學會。
- 蕭文強 (1978)。《為甚麼要學習數學？ — 數學發展史給我們的啓發》。香港：香港新一代文化協會。
- Bell, F.H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools)*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Co.
- Baroody, A.J., Reil, Y., & Johnson, A.R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Resource in Mathematics Education*, 38(2), 115 – 131.

- Chan, L.K.F., Leung, C.T., & Wise, S.R. (1988). *Mathematics for Hong Kong (Book 3)*. Hong Kong: Canotta Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education (China lectures)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fung, C.I., & Wong, N.Y. (1997). *Unofficial mathematics curriculum for Hong Kong: P.1 to S.5*. Hong Kong: Hong Kong Association for Mathematics Education.
- Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65 – 97). New York: Macmillan.
- House, P.A. (1995). *Connecting mathematics across the curriculum (The 1995 Yearbook)*. Reston, Virginia: NCTM
- Kerkman, D.D., & Siegel, R.S. (1997). Measuring individual differences in children's addition strategy choices. *Learning and individual differences*, 9(1), 1 – 18.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Resnick, L.B., & Ford, W.W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association, Inc.
- Scardura, J.M. (1977). *Problem solving: A structural/process approach with instructional applications*. New York: Academic Press.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1 – 36.
- Siu, F.K., & Siu, M.K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematics Education for Science and Technology*, 10(4), 561 – 567.
- Siu, F.K., Siu, M.K., & Wong, N.Y. (1993). Changing times in mathematics education: The need of a scholar-teacher. In C.C. Lam, H.W. Wong, & Y.W. Fung (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia: Challenges of the 21st Century* (pp. 223 – 226). Hong Kong: Department of Curriculum and Instruction, the Chinese University of Hong Kong.
- Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* (December), 20 – 26.
- Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404 – 411.