

學生真的認識「因數」嗎？

周惠英
聖公會蒙恩小學

引言

筆者在學校裏多是教授小五及小六數學，不知其他老師有否跟我遇上相同的難題：在教授最大公因數及最小公倍數時，無論如何舉出生活實例，又或者繪影繪聲地著學生緊記著兩者的分別，學生總是在一段時間後便將這兩個課題混淆。有些老師甚至曾經刻意把這兩個課題分放在上下學期教授，期望學生能先對其中一個課題的內容熟練以後，再面對另一課題。可惜的是任何方法都無法令奇蹟出現，究竟是甚麼地方出了問題？其實問題還不只於此，學生甚至在用列舉法找出某數的所有因數時，總會有三兩個數的錯和漏，老師往往都認定這是學生的粗心大意，難道這就是最圓滿的解釋嗎？我們作為人師，又是否真的不可以再作甚麼了嗎？那麼數學學習便要扣上很多無奈了。

學生要學會以上兩大課題前，理應在四年級^(註)時已經要打穩基礎，至少他們要知道「甚麼是一個數的因數」和「應如何找出一個數的所有因數」。但坊間很多教科書並沒有明明白白的解答這兩道問題，尤其是找因數的方法究竟是用「除法」還是「乘法」仍是有點模糊。在課堂上，老師最多也只是用數粒或實物拼砌出一個又一個的矩形，然後用乘式去紀錄，這樣便可找出所有因數。但問題是整個學習過程中，老師只把注意力集中在乘式的紀錄上，縱使有提及「除」這個字與「因數」的關係，相信也不足以令學生留下深刻的了解及記憶，結果「因數」的真正意義很快便被隱藏在這些乘式裏，令學生在往後的學習裏找不到一個真正的「救生圈」。這裏必須指出，儘管一般數論書都會以「存在整數 k ，使得 $ak = b$ 」作為非零整數 a 是整數 b 的因數的定義（可參看潘、潘，1992，第7頁），這說法絕非找尋因數的系統方法。要問12是否948的因數，就是要知道是否存在整數 k ，使得 $12k = 948$ 。像 $12 \times \underline{\quad} = 948$ 的填空題，試問如何可以由乘法入手呢？但由於一般課本用上的例子，通常是較小的數，像 $2 \times \underline{\quad} = 12$ 的問題，在輕而易舉唸乘數表便可以完成的背後，其實隱藏了這方法是大海撈針的本

註：根據目標為本課程，因數和倍數是三年級的課題，而利用列舉法找最大公因數和最小公倍數則是四年級的課題。2002課程則把這兩大課題合併在四年級時才教授。

質！

重組教學流程

從數學化觀點看（可參看馮，2004），要令真正的學習重新浮現，就必須從課題的基本原理入手。所以課堂的設計有以下三個目標：

1. 學生能夠說出「一個可以整除某數的數，就是某數的因數」。
2. 學生掌握一個有效的工具找出某數的所有因數。
3. 學生能藉此培養一個良好的工作習慣。

至於課堂的流程則由學生的已有知識——「倍數的意義」為起始點，再通過倍數和因數的關係，帶出「找出因數的方法」，即「一個可以整除某數的數，就是某數的因數」。所以，如果要找出某數的所有因數，最直接的方法就是由 1 開始，用除式把它逐一去除，能整除的就是某數的因數。筆者為此設計了一張可以找出 30 的所有因數的課堂活動紙（附頁一），上有 30 個附有除式及紀錄每道除式的結果的方格，目的是要讓學生實實在在經歷「一次」完整的找因數工程，這方法看似很笨，亦花時間，但卻非常有效，還有一些意外收穫。學生在「除」的過程中，很快便發現當完成了過半數的除式以後（在這例中，即 15 以後），到最後一道除式以前，是不會再找到其他因數的了。這一發現相信在一般的教科書或教學計畫裏都不會被收納在內，而在拼砌矩形找因數的過程中，亦不容易被發覺。

此外，在教學的討論過程中，大部分學生都能從個人的工作，加上其他同學的發現，歸納出以下各項學習重點：

1. 「1」必定是所有數的因數
（其實學生很少有機會認認真真用「1」去除其他整數，所以這個發現並不是必然的。事實上從二年級學除數開始，學生就很少接觸如： $12 \div 1$ 或 $26 \div 1$ 等的數式。）
2. 由以上除式可知任何數的最大因數就是原來的數。
3. 「2」是所有雙數的因數，由這道除式亦可知任何雙數的一半亦是該數的其中一個因數。
4. 配合數的整除性檢定法則，學生在經歷了一次完整的找因數過程後，全都能在第二次找另一數的因數時，肯定地判斷哪些除式必定可以找得到因數，哪些不用除法也可肯定不是因數了。

當然學生是有個別學習差異的，部分能力較強的學生在做「48 的因數」一紙中，已能準確地用最少的除式，有系統地找出 48 的所有因數；而能力稍遜的學生則能依其能力按比例地用較多的除式去完成相同的工作，分別就只在於多了三數道除式，而這亦正好體現這設計背後的照顧學習差異的力量（附頁二及三）。

完成這課題學習後，學生們都不約而同地訴說這是一趟艱辛的旅程，有學生甚至形容為「翻山涉水找因數」（其實他們只用了約二十分鐘去完成這件工作罷了）。筆者仍記得當日他們在完成第一張工作紙後，都紛紛吐出一口「大氣」，就是這一口氣，令所有學生都雀躍在接下來的課堂討論中，而上述一切發現亦皆由學生自行找著，原來只要一個從基礎學理為出發點的教學設計，加上靜心地讓學生用二十分鐘去完成這三十道除式，就能還他們一個真正的「學習」經歷。這次以後，每當筆者再問學生「甚麼是這個數的因數？」、「還記得怎樣找因數嗎？」等問題時，答案都是肯定的，更寶貴的是我們之間有了一套能溝通無阻的共同語言（數學語言）。

艱辛過後

接下來的就是每個人都關心的考試及評估了，雖說分數並不代表甚麼，但它始終是一個被大多數人接受的指標。在評估中，接近百分之九十八的學生能準確分辨「因數」和「倍數」的題目，至於在列寫某數的所有因數時，小部分學生仍有遺漏，這可能與學生的考試情緒有關吧。總結下來，筆者仍肯定的說句這工作是有很高的價值的，至少學生們能投入在這學習過程中，從討論到總結，從懷疑到肯定，這一切都以學生為中心，為師至此，夫復何求。

本文承蒙馮振業博士提供寶貴意見，謹此致謝！

參考資料

馮振業（2004，6月）。數學化教學：理論、實踐與前瞻。收入 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編），《香港數學教育會議 — 2004 論文集》，78 – 88 頁，香港大學教育學院。

潘承洞、潘承彪（1992）。《初等數論》。北京：北京大學。

作者電郵：fannychow@sinahappy.com

請完成下列各直式：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

$\begin{array}{r} 30 \\ 1 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>1 可以/不可以整除 30 ∴ 1 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 2 \overline{) 30} \\ \underline{20} \\ 10 \end{array}$ <p>2 可以/不可以整除 30 ∴ 2 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 3 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>3 可以/不可以整除 30 ∴ 3 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 4 \overline{) 30} \\ \underline{24} \\ 6 \end{array}$ <p>4 可以/不可以整除 30 ∴ 4 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 5 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>5 可以/不可以整除 30 ∴ 5 是/不是 30 的因數</p>
$\begin{array}{r} 30 \\ 6 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>6 可以/不可以整除 30 ∴ 6 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 7 \overline{) 30} \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$ <p>7 可以/不可以整除 30 ∴ 7 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 8 \overline{) 30} \\ \underline{24} \\ 6 \end{array}$ <p>8 可以/不可以整除 30 ∴ 8 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 9 \overline{) 30} \\ \underline{27} \\ 3 \end{array}$ <p>9 可以/不可以整除 30 ∴ 9 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 10 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>10 可以/不可以整除 30 ∴ 10 是/不是 30 的因數</p>
$\begin{array}{r} 30 \\ 11 \overline{) 30} \\ \underline{22} \\ 8 \end{array}$ <p>11 可以/不可以整除 30 ∴ 11 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 12 \overline{) 30} \\ \underline{24} \\ 6 \end{array}$ <p>12 可以/不可以整除 30 ∴ 12 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 13 \overline{) 30} \\ \underline{13} \\ 17 \end{array}$ <p>13 可以/不可以整除 30 ∴ 13 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 14 \overline{) 30} \\ \underline{14} \\ 16 \end{array}$ <p>14 可以/不可以整除 30 ∴ 14 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 15 \overline{) 30} \\ \underline{15} \\ 15 \end{array}$ <p>15 可以/不可以整除 30 ∴ 15 是/不是 30 的因數</p>
$\begin{array}{r} 30 \\ 16 \overline{) 30} \\ \underline{16} \\ 14 \end{array}$ <p>16 可以/不可以整除 30 ∴ 16 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 17 \overline{) 30} \\ \underline{17} \\ 13 \end{array}$ <p>17 可以/不可以整除 30 ∴ 17 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 18 \overline{) 30} \\ \underline{18} \\ 12 \end{array}$ <p>18 可以/不可以整除 30 ∴ 18 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 19 \overline{) 30} \\ \underline{19} \\ 11 \end{array}$ <p>19 可以/不可以整除 30 ∴ 19 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 20 \overline{) 30} \\ \underline{20} \\ 10 \end{array}$ <p>20 可以/不可以整除 30 ∴ 20 是/不是 30 的因數</p>
$\begin{array}{r} 30 \\ 21 \overline{) 30} \\ \underline{21} \\ 9 \end{array}$ <p>21 可以/不可以整除 30 ∴ 21 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 22 \overline{) 30} \\ \underline{22} \\ 8 \end{array}$ <p>22 可以/不可以整除 30 ∴ 22 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 23 \overline{) 30} \\ \underline{23} \\ 7 \end{array}$ <p>23 可以/不可以整除 30 ∴ 23 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 24 \overline{) 30} \\ \underline{24} \\ 6 \end{array}$ <p>24 可以/不可以整除 30 ∴ 24 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 25 \overline{) 30} \\ \underline{25} \\ 5 \end{array}$ <p>25 可以/不可以整除 30 ∴ 25 是/不是 30 的因數</p>
$\begin{array}{r} 30 \\ 26 \overline{) 30} \\ \underline{26} \\ 4 \end{array}$ <p>26 可以/不可以整除 30 ∴ 26 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 27 \overline{) 30} \\ \underline{27} \\ 3 \end{array}$ <p>27 可以/不可以整除 30 ∴ 27 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 28 \overline{) 30} \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$ <p>28 可以/不可以整除 30 ∴ 28 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 29 \overline{) 30} \\ \underline{29} \\ 1 \end{array}$ <p>29 可以/不可以整除 30 ∴ 29 是/不是 30 的因數</p>	$\begin{array}{r} 30 \\ 30 \overline{) 30} \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$ <p>30 可以/不可以整除 30 ∴ 30 是/不是 30 的因數</p>

∴ 30 的因數有：1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

請完成下列各直式：

$\begin{array}{r} 48 \\ 1 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>1) 48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ 2 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>2) 48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ 3 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>3) 48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ 4 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>4) 48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ 6 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>6) 48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>
$\begin{array}{r} 48 \\ \overline{)48} \end{array}$ <p>48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ \overline{)48} \end{array}$ <p>48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ \overline{)48} \end{array}$ <p>48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ \overline{)48} \end{array}$ <p>48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ \overline{)48} \end{array}$ <p>48 <u>可以</u> 不可以整除 48 \therefore <u>是</u> / <u>不是</u> 48 的因數</p>

\therefore 48 的因數有：1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

這次你只做了多少道除法？5 完成一道除法後，我可以肯定 2 個因數。

請完成下列各直式：

$\begin{array}{r} 15 \\ 1 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>1</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>1</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 24 \\ 2 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>2</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>2</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 16 \\ 3 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>3</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>3</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>4</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>4</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \overline{)48} \\ \underline{45} \\ 3 \end{array}$ <p>48 <u>5</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>5</u> 是/不是 48 的因數</p>
$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>6</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>6</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \overline{)48} \\ \underline{49} \\ -1 \end{array}$ <p>48 <u>7</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>7</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>8</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>8</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 9 \\ 9 \overline{)48} \\ \underline{45} \\ 3 \end{array}$ <p>48 <u>9</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>9</u> 是/不是 48 的因數</p>	$\begin{array}{r} 48 \\ 48 \overline{)48} \\ \underline{48} \\ 0 \end{array}$ <p>48 <u>48</u> 可以/不可以整除 48 \therefore <u>48</u> 是/不是 48 的因數</p>

\therefore 48 的因數有：1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

這次你只做了多少道除法？10 完成一道除法後，我可以肯定 7 個因數。