數學教具／學具的運用[1]

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

柯志明
教育統籌局

戚文鋒
中華基督教會譚李麗芬中學

近年隨著新中小學數學課程的推出，數學教學著重師生的互動，這也許是世界性的趨勢。於是教具／學具受到廣泛地推廣。其實早在 1973 年，美國國家數學教師議會已把當年年刊的主題定爲教具（當時稱爲 instructional aids）[2]。值得注意的是，該年刊不只把教科書看待成教具，且用 50 頁（頁 57 – 106）的篇幅闡述如何把教科書用作教具！

記得數年前在碩士班「課程評鑒」課程中，有老師問如判斷某特定教具的有效性（這是一個課程評鑒問題啊！）。這當然與如何運用該教具有關，不能一概而論，還要看學習數學的哪些面相（概念？操作？應用？…… —— 這些同樣重要），甚或要學些什麼樣的數學。其實資訊科技的運用也有類似之處（見 Wong，2003）。

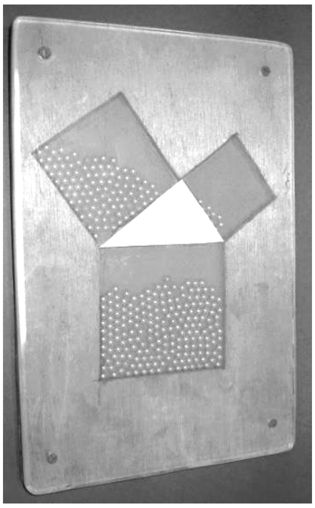
如果我們把數學學習看成從具體到抽象、從歸納到演繹這麼的一個「數學化」過程（蕭文強，1978），我們就可以更清楚的看到不同教具可以產生的教學作用。一些教具的主要作用可能在於引起動機或加深印象（我們無意貶低這一類教具在教學過程上的作用）、一些是仿造科學實驗、而一些其實已蘊含了數學證明（蕭文強所說的 “idoof” – idea of proof）甚或本身已是一種證明。先看兩個畢氏定理的教具[3]。

1　本文得編者提供不少有用的意見和資料，筆者謹此鳴謝。

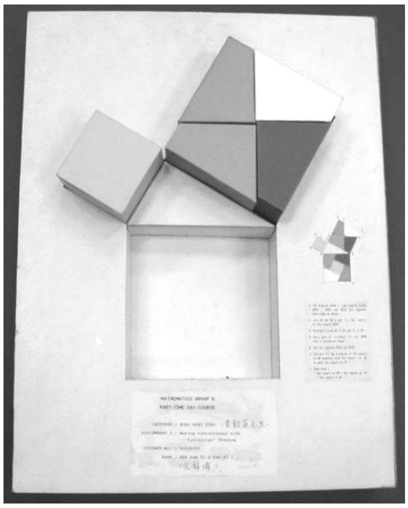
2　更早之前英國還有所謂「結構性教具」(structural apparatus)，相當於今天的「學具」（manipulative）。

3　本文所用的不少實物教具乃為過往香港中文大學教育學院教育文憑學生之習作，謹此對各製作者鳴謝。

教具〔1〕(見圖一)是透過倒鋼珠(或發泡膠粒、甚或注水等)讓學生看到「$a^2 + b^2 = c^2$」，但很難說服(或推論證明)畢氏定理確實成立，所涉及的只是一個特定的直角三角形反而不是最主要的問題，而是中間涉及的測量誤差(如鋼珠間的空隙。縱然用水，亦有其測量誤差)無法估計對 $a^2 + b^2 = c^2$ 的精確性有多大影響(說個笑話，假如畢氏定理其實是「$a^2 + b^2 = c^2(1-\frac{c}{1000}+\frac{c^2}{1000^2})$」，這類實驗未必會覺察出來)。



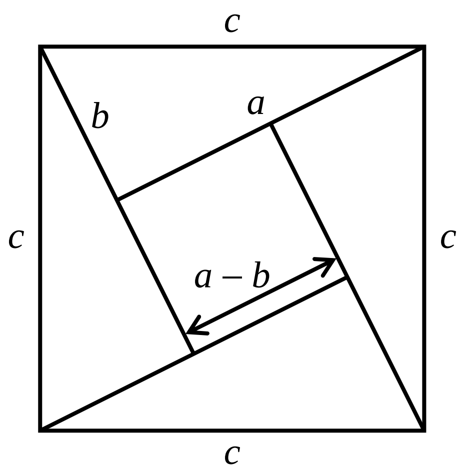
圖一：教具〔1〕



圖二：教具〔2〕

而教具〔2〕(圖二)在理論上也是實驗，也有其測量誤差，然而整個證明就已藏在其中了。這個拼圖的做法其實類似《周髀算經》中的證明(圖三)。當然這個教具也附帶一個「贈品」，由於中間涉及面積，可提醒學生何以畢氏定理涉及平方，加深學生對定理公式的記憶。

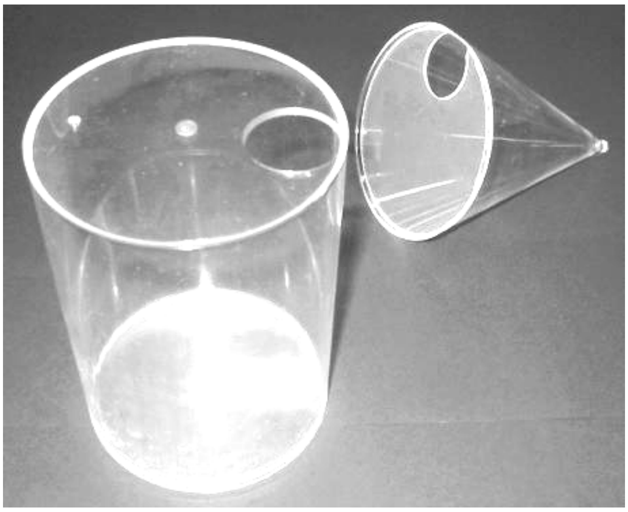
《周髀算經》中的「弦圖」



趙爽為勾股定理作註的證明

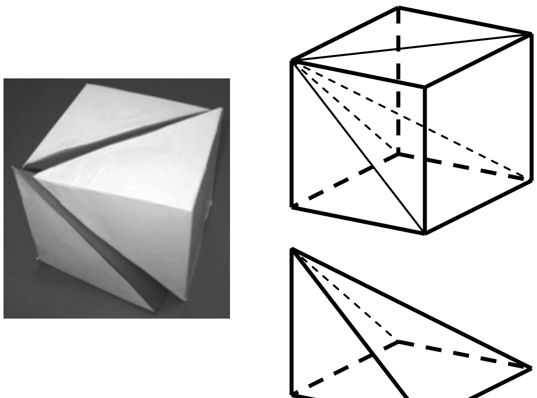
圖三：《周髀算經》及趙爽對畢氏定理的證明

立體體積又是一例。由於體積計算及其證明本身大不易為（蕭文強，1981，1993），故此只能透過一些教具去展示（illustrate）這些公式。錐體體積、錐體表面面積、球體體積、球體表面面積甚至圓面積均有其流行的教具，但中間的數學意味各有不同。

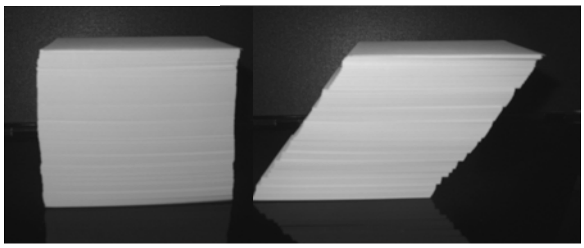


圖四：教具〔3〕

教具〔3〕（圖四）主要是透過「注水」實驗，個中問題前已詳述。至於角錐體（特別是以矩形為底的錐體）則有數個較數學化的教具，教具的示範基本上已是一種證明，而且其中各有特色。



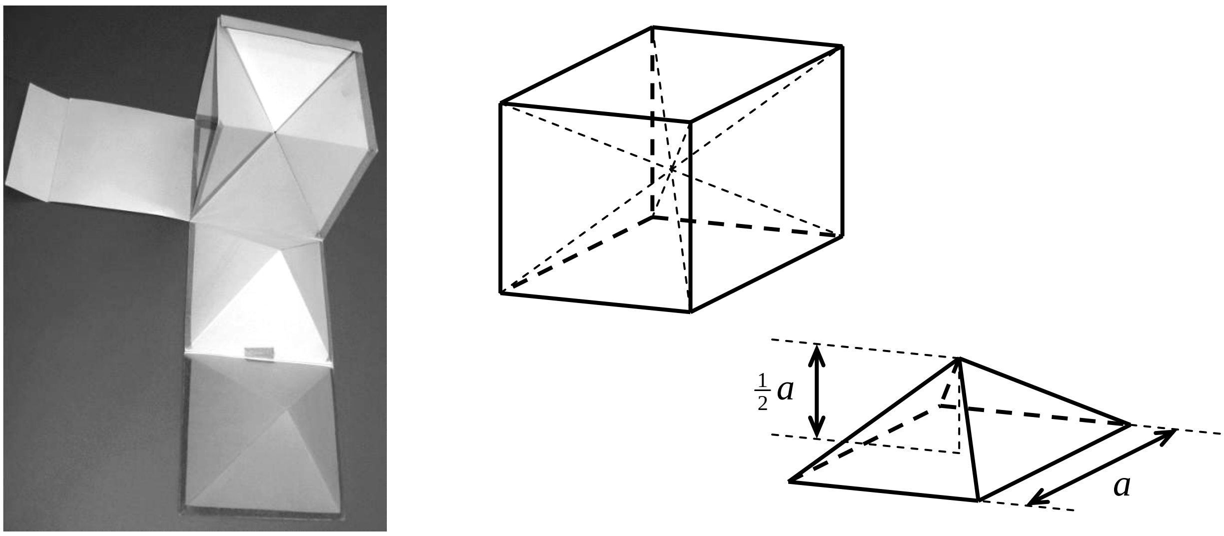
圖五：教具〔4a〕



圖六：同高體積不變

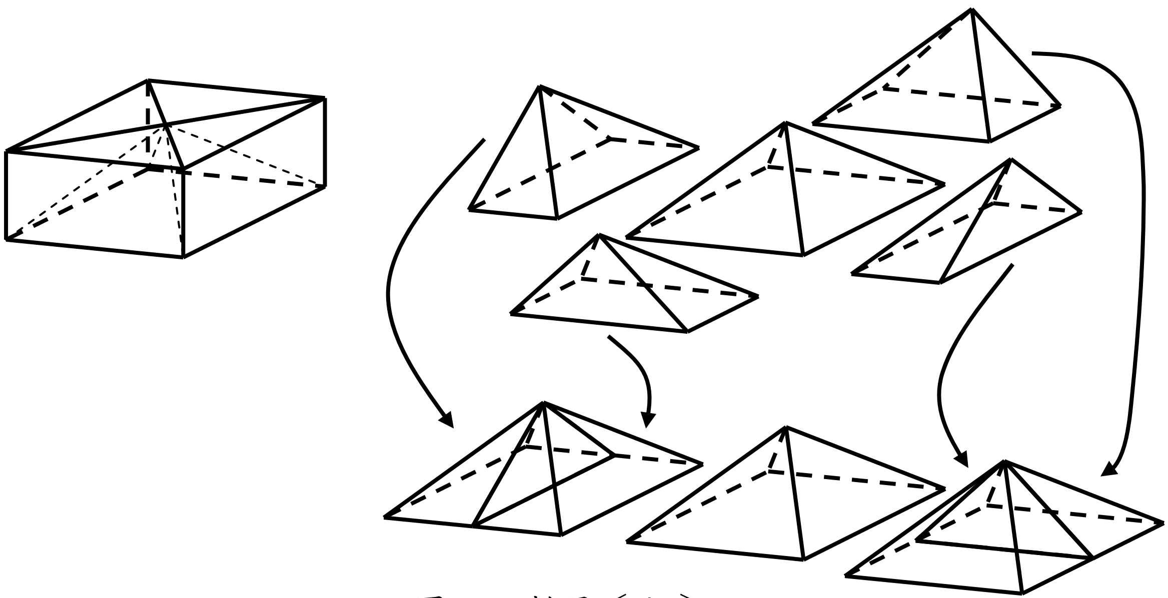
教具〔4a〕（圖五）所切割出的錐體的高與原來的正立方體的高相等，但已不是直立錐體，可透過一疊白紙的斜移（圖六）給學生瞭解兩個同高立體若等高切面面積相等，體積也相等。教具〔4b〕（圖七）切出的錐體均為直立，但高減半，要做一些簡單的算術才能得到體積公式：

6 個底爲 $a \times a$ 的正方形、高爲 $\frac{1}{2}a$ 的錐體，體積總和 $= a^3$。因此，每個錐體體積 $= \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \times (a \times a) \times (\frac{1}{2}a) = \frac{1}{3} \times$ 正方形面積 $\times$ 高。



圖七：教具〔4b〕

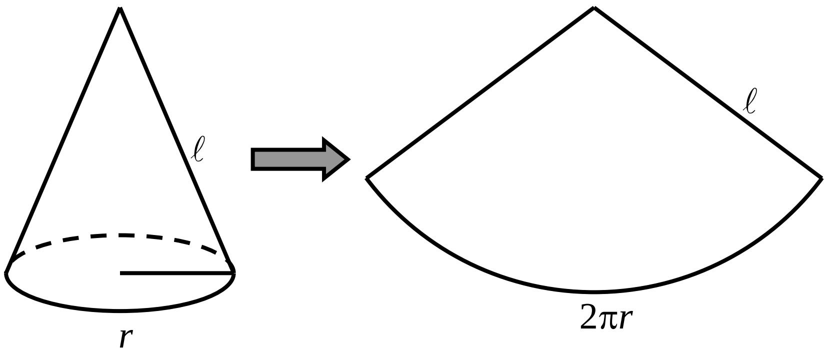
如果底是以 a 爲邊長的正方形，高是 $\frac{1}{2}a$ 的長方體，則還有一個證明，見教具〔4c〕（圖八）[4]。



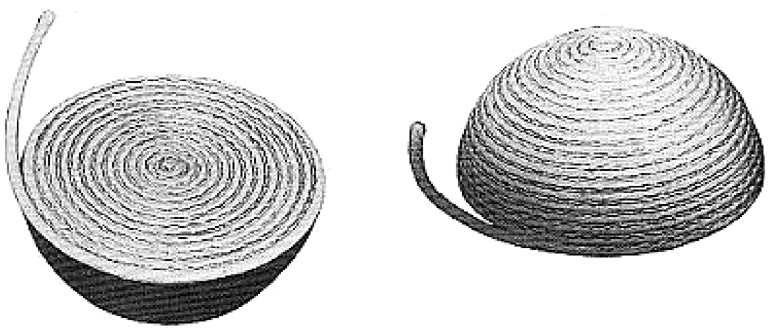
圖八：教具〔4c〕

4　以上證明，只能針對特定的錐體，如底必須是正方形，高不是與底的邊長相同就是等於一半。對於一般錐體體積的計算就不得不依靠微積分了。見蕭文強（1993）。

教具〔5〕（圖九）是常見的圓錐體表面積證明，教具〔6〕、〔7〕（圖十、十一）都屬於「實驗」、與公式本身的距離甚遠，相比之下，意大利數學家卡瓦列利（Bonaventura Cavalieri；1598 – 1647）的方法（圖十二）就是一個既巧妙、又不太難的體積公式證明（見Eves，1964，頁 327 – 329）[5]。



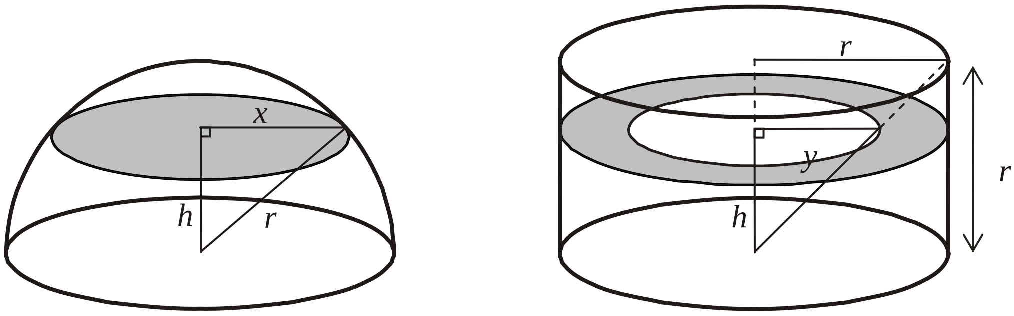
圖九：教具〔5〕。圓錐體的表面面積



圖十：教具〔6〕。來源：NCTM（1973），頁 245

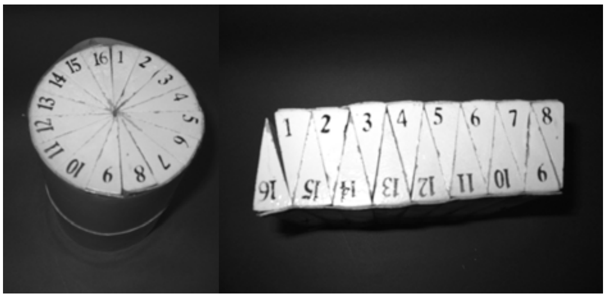
圖十一：教具〔7〕。來源：戚文鋒（2005）

5　編者按：此即祖暅的「冪勢既同，則積不容異」的原理（現稱劉祖原理或祖暅原理），卡瓦列利的發現，比祖暅晚一千一百多年。亦見蕭文強（1993）。

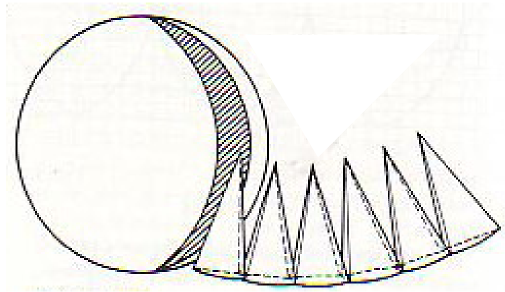


圖十二：來源：Eves（1964），頁 328

而教具〔8〕（圖十三）亦與嚴格證明相當接近。因為若將扇面愈割愈細（微積分手法）就得到所需的公式，中間亦有其歷史脈絡。阿基米德用類似的想法，將一個球體想像成無限個頂點為球體中心、底在球面的錐體的總和（見圖十四），得出球體體積和表面積的關係。若已得到球體體積的公式，那就可以得到表面積的公式了。（事實上，他是先得到表面積的公式，再用這關後去求得體積公式。詳見 Edwards，1979，頁 43 – 44。；又見蕭文強，2004）。



圖十三：教具〔8〕



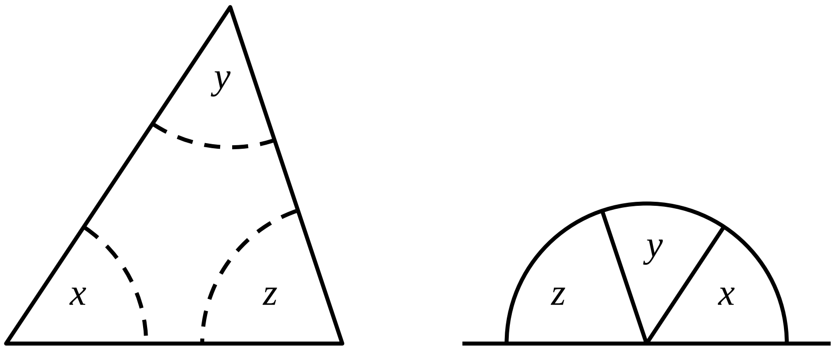
圖十四：
來源：NCTM（1973），頁 246

上面談到不少仿效科學實驗的教具，這早在 70 年代（隨著自我發現法的流行）甚為普遍，筆者以為這未必完全沒有教學作用，但不應與數學的證明混淆。嚴格來說，不應與相關公式的「來源證」相提並論。如果我們返回前面「由歸納到演繹」這個提法，這類實驗可以是一個好的「歸納」過程，由不同的實驗結果歸納（所謂「重新發現」）出一些有待證明的猜想或通則。

不過，猶如伍鴻熙教授 2000 年在香港數學教育學會的一個研討會上指出，要是做這類實驗，就要做得透。以三角形內角和為例，若只（無論老

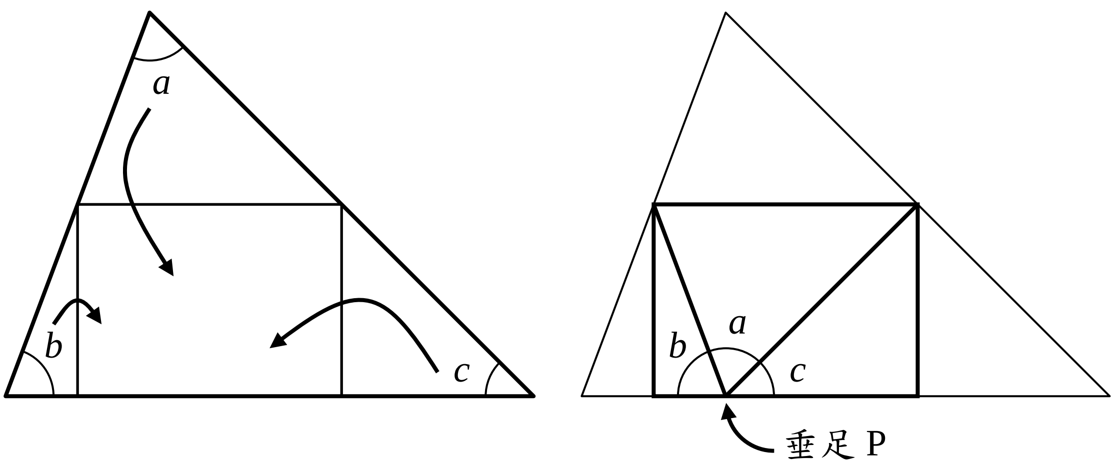
師或學生）量度一個三角形的內角和，得到 180°，就結論到三角形內角和 ＝ 180°，不只無數學意味，也不符合科學實驗的精神。若果讓整班學生各自量度<u>不同</u>三角形的內角和，都得出接近 180° 的結果，起碼在一個物理實驗的層面，才可以歸納到三角形內角和極有可能是 180°（然而這又與在嚴格的證明中只證一個典型三角形有所不同，詳見黃家鳴，1995）。在科學實驗這個定位上，所謂「驗證」（verification）才有意思。否則當一個定理已用演繹方式證明了，又何須驗證？

三角形內角和的教具還有兩個頗爲流行的，而其中的數學味道亦有不同。例如把三個角撕下，再貼在一直線上（圖十五），這其實與正式證明不遠了。



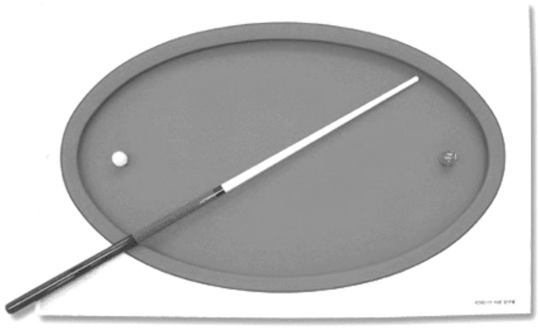
圖十五：撕角求三角形內角和

此外，教具〔9〕（圖十六）亦是證明之一種，但 P 不是隨便選取的，故其實學生不易瞭解何以這麼巧。若不「揭曉」P 是垂足，學生不可能自行重複這實驗。故此，這是展示用的教具多於學生自我發現的學具。

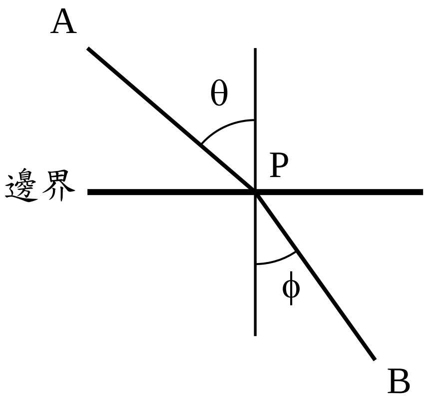


圖十六：教具〔9〕。三角形摺合證明內角和為一平角

除了教具與學具之外，傳統上有一些數學「模型」大抵是屬於某定理的幾何詮釋或應用。如橢圓形桌球（圖十七），又或 Snell 的定理（圖十八）等。在某個意義，對橢圓形桌球毫無認識無損對橢圓形的學習。此處亦可以透過模型製作加深認識立體空間的關係，這也可說是介乎教具與學具的中間（圖十九）。

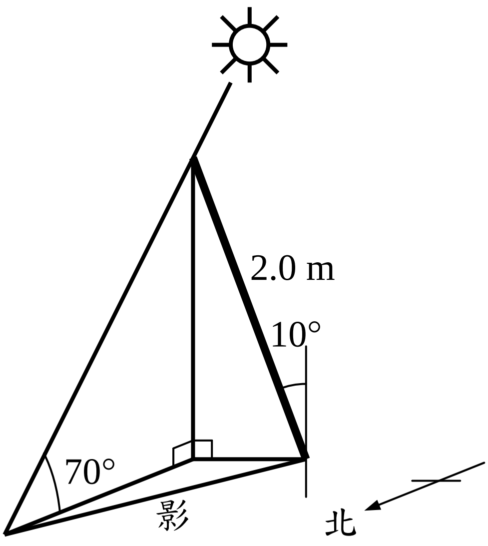


圖十七：橢圓形桌球



一條鐵道連接在邊界兩面的 A、B 兩市。A 市所處國家運費為 \$p/km 而 B 市所處國家為 \$q/km。A、B 之相對位置如圖，現選擇 p 點使得運費最低。用微積分求 θ 與 ϕ 之關係，並給出一個物理詮釋。【1981 年《數學通報》1 期 63 頁問題徵答欄，改編自 1977 年香港大學數學系「一年級分析課」習題。】

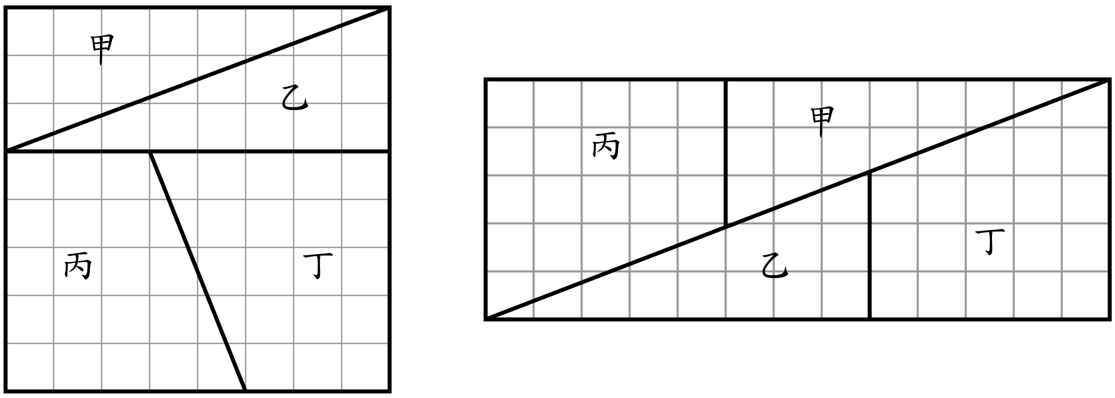
圖十八



按文意製模型：「一 2 米長木椿向東傾斜 10°，太陽於南方，仰視角為 70°，求椿影長。」

圖十九：按題意製作立體模型。來源：黃毅英（1990）

最後我們想略談電腦模擬實驗。在某方面，電腦當然有其威力。例如要觀察出 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，透過試算表，就可一下子得出數百個數千個資料。又例如透過互動幾何套裝軟體，可以以拉動滑鼠變相做了無限個三角形重心共點的實驗。然而這類電腦實驗還要相當小心的。例如電腦模擬擲骰與實物擲骰有相當大的差距。姑勿論誰較「真實」，起碼，電腦擲骰不是實物擲骰的一個好的模擬（simulation），而其中的隨機性主要是按照程式設計者的預定，在學習而言，很難說服這種按電腦程式預設的擲骰與實物擲骰相類似。另一個是電腦模擬注水，因爲「電腦注水」更容易掩藏測量誤差，有名的「64 = 65」便是一例（圖二十）。



面積 $= 8 \times 8 = 64$　　面積 $= 5 \times 13 = 65$

圖二十：64 = 65？

參考

戚文鋒（2005）。自製教具以驗證球體表面面積及體積公式。《數學教育》20 期，頁 75 – 77。

黃家鳴（1995）。數學證明與日常生活論證。載蕭文強（編）。《香港數學教育的回顧與前瞻 —— 梁鑒添博士榮休文集》（頁 167 – 187）。香港：香港大學出版社。

黃毅英（1990）。立體數學遊戲與空間想像力之訓練。《數學傳播》56 期，78-9 6。後載黃毅英（1997）（編）。《邁向大眾數學的數學教育》（頁 294 – 328）。台北：九章出版社。

蕭文強（1978）。《為甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。第二版（1992）香港新一代文化協會。增訂本（1995），台北：九章出版社。

蕭文強（1981）。在數學教學上如何古爲今用。《抖擻雙月刊》44 期，頁 70 – 73。

蕭文強（1993）。不用微積分能計算體積嗎？載蕭文強（編）。《1, 2, 3, … 以外 —— 數學奇趣錄》（頁 45 – 73）。香港：三聯書店有限公司。

蕭文強（2004）。《杵臼關節、阿基米德、多面體》。香港：香港大學數學系。

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag.

Eves, H. (1953/1964). *An introduction of the history of mathematics*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

National Council of Teachers of Mathematics (1973). *Instructional Aids in Mathematics (34th Yearbook)*. Reston, VI: author.

Resnick, L.B., & Ford, W.W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. U.S.: Lawrence Erlbaum Association.

Wong, N.Y. (2003). The influence of technology on the mathematics curriculum. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 271 – 321). Kluwer Academic Publishers.

作者電郵：nywong@cuhk.edu.hk