

自製教具驗證球體表面面積及體積公式

戚文鋒

中華基督教會譚李麗芬紀念中學

前言

香港學生在初中階段已須學習球體表面面積公式及體積公式。一般教科書並沒有交代公式的由來 [1]，或只是建議一些較難在課堂上進行的活動以驗證公式 [2]，而市面上亦無現成的教具輔助。本文介紹如何製作簡單的教具在課堂上驗證上述兩條公式，使它們變得「合理」。

驗證球體表面面積公式的教具

根據 Choi 等人 [5] 的意念，先預備一個直徑約 6 cm 的發泡膠球，切開兩半。用約 5 mm 闊的繩覆蓋半球體的曲面，再用繩覆蓋另一半球體的平面。過程中可用針插在發泡膠球上以固定繩子，如圖一所示。

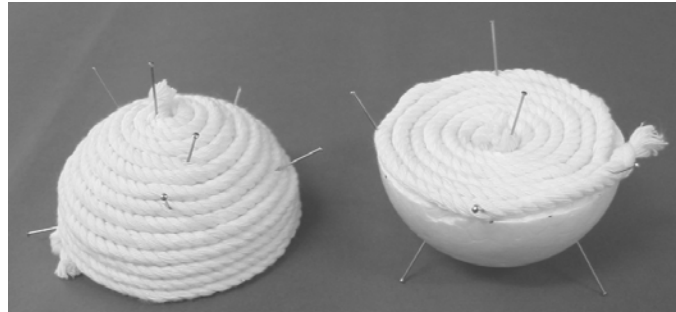


圖 一

比較兩條繩的長度，應能發現覆蓋曲面的一條的長度是另一條的兩倍，如圖二所示。

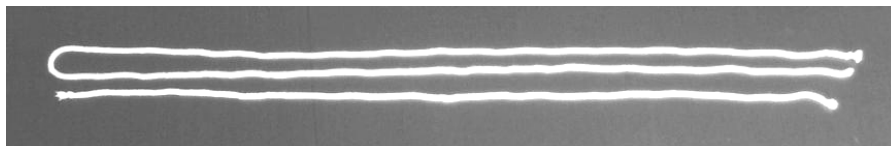


圖 二

設發泡膠球的半徑為 r 。

由此可知，半球體的曲面面積 = $2\pi r^2$

球體的表面面積 = $4\pi r^2$

我們在美國國家數學教師議會 1973 年的年刊 [6] 中也可以找到類似的實驗 (245 頁)。

驗證球體體積公式的教具

預備一個「西瓜波」(空心硬膠球體)。利用透明膠片捲成一個圓柱體，使得圓柱體的高(扣除發泡膠底部的厚度)和直徑均相等於球體的直徑，並將圓柱體的高分成三等份，畫上刻度，如圖三所示。

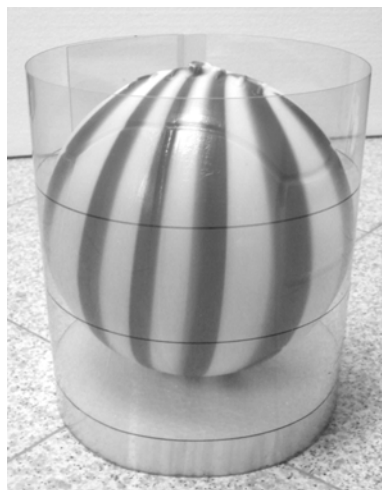


圖 三

將「西瓜波」切成兩半。利用其中一半盛滿發泡膠粒，然後將發泡膠粒倒入圓柱內，重複一次，應能發現發泡膠粒填滿圓柱的三分之二，如圖四所示。

設「西瓜波」的半徑為 r 。

由此可知，

$$\begin{aligned} \text{球體的體積} &= \frac{2}{3} \times \text{圓柱體的體積} \\ &= \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

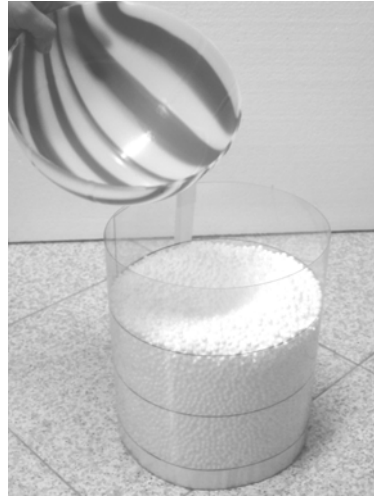


圖 四

固然上述玩意並不是數學證明，而證明本身是很難的 [3, 4]。但起碼讓學生感受到這些公式的「實驗性支撐」，亦能為沉寂的課堂帶來一點熱鬧。

黃毅英教授曾為本文作出修訂，謹致謝意。

參考資料

- [1] 尹鏐鴻等 (2001)。《生活與數學 3A》(149 頁)。香港：牛津大學出版社。
- [2] 周偉文 (2001)。《達標數學 2B》(181 – 185 頁)。香港：文達出版有限公司。
- [3] 蕭文強 (1981)。在數學教學上如何古為今用。《抖擻雙月刊》44 期，70 – 73 頁。
- [4] 蕭文強 (1993)。不用微積分能計算體積嗎？載蕭文強 (編)。《1, 2, 3, …以外》(45 – 73 頁)。香港：三聯書店有限公司。
- [5] Choi W.K., Tang C.Y., & Lo S.F. (1992). Surface area of a sphere. *Datum*, 32, 17 – 19.
- [6] National Council of Teachers of Mathematics (1973). *Instructional Aids in Mathematics (34th Yearbook)*. Reston, VI: author.