連貫在一起的幾個數學遊戲

龍德義

在學校負責數學學會已有多年了。每年都會舉辦數學週，而以攤位遊戲形式的最能吸引同學的參與。每次選取的攤位遊戲各自都是獨立的，互相沒有多大的相連關係。多一個遊戲，或者少一個都無大礙，通常是視乎人手而決定遊戲的數量，譬如：獨子棋(Solitaire)、華容道、平面拼圖、索馬立體(Soma Cube)、河內塔(Tower of Hanoi)等等。雖然每個遊戲都與數學有關，但始終覺得有些美中不足。可能是遊戲與遊戲之間沒有共通的數學概念或原理；又或者是未能夠清清楚楚地向參與遊戲的同學展示遊戲中的數學概念或原理。

事實上，負責籌備數學週的同學多是中四及中六的。他們大部份是頭一次(頂多是第二次)負責策劃這類型活動。活動的對象均爲低年級；故此，他們選擇遊戲的準則，都以其趣味性和吸引性爲主。至於遊戲的連貫性則很少被顧及。

以下就是依從「連貫性」這個考慮，安排一系列相關的遊戲。其中的遊戲並非筆者創作的，有些甚至是大家耳熟能詳的。在此，筆者只不過將它們按兩個數學概念作出先後的安排而已。兩個數學概念是「同餘數」和「成對」(或「對稱」)。爲免令文章變得冗長難讀起見，各個遊戲的規則以附件形式介紹，而正文則討論那兩個數學概念如何貫串這些遊戲。[1] 遊戲的名稱和次序詳列如下：

遊戲一： 爭奪三十一
遊戲二： 巧和三十一
遊戲三： 雙雙對對
遊戲四： 拈(Nim) 或稱讓梨遊戲
遊戲五： 爭先遊戲
遊戲六： 擦線遊戲
遊戲七： 威索夫(Wythoff)遊戲

遊戲一（爭奪三十一）的必勝法則是首先取去 3 顆棋子。因爲 31 與 3 爲模數 4 的同餘數。模數 4 這個數字的決定是在於遊戲規

編者按：請未熟識以下遊戲的讀者先翻看附錄，掌握有關戲規則及思考一下遊戲過程的一些實際情況，然後再繼續閱讀下文。

則。每次提取棋子最少 1 顆，最多 3 顆；故此，可以控制每兩次提取均取去 4 顆棋子。「同餘數」這個名詞並不一定要介紹給參與者。最有效介紹這個數學概念莫過如「自我發現法」。不過，絕大部份的學生都需要一些提示。最好的提示是減少棋子的數目，譬如：只剩下 6 顆，應如何提取才可以必勝呢？或者再顯淺地：只剩下 4 顆，又如何呢？只剩下 8 顆，又如何呢？透過實戰，參與者很快能掌握模數 4 這個概念。

為了測試學生是否真的掌握「同餘數」這個概念，可以作以下的變化：-

變化一：改變棋子的數目。如由 31 顆變為 41 顆。
變化二：改變遊戲規則。如每次提取棋子最少 1 顆，最多 4 顆。
變化三：改變決定勝負的規則。譬如規定每次提取棋子最少 2 顆，最多 5 顆。這時，決定勝方的規則須更改為能夠拿取最後 1 顆棋子或者令對方不能夠拿取最後 1 顆棋子的一方為勝方。

遊戲二（巧和三十一）的必勝法則，驟眼看上去跟遊戲一的一模一樣。但實際上每個數字都只可以出現四次。故此，與遊戲一的無限制地使用數字 1 至 6 的情況不同。譬如：你計算出 3 與 31 是模數 7 的同餘數。因此，你選擇先翻動紙牌，並翻開 3 點。若對手跟你同樣聰明的話，他會一直翻開 4 點，而你為了要控制每兩次翻開合共 7 點，你會一直翻開 3 點。當對手翻開第四張 4 點時，得到總和 28 點，而你再沒有 3 點的牌可翻了，你只有輸掉這場比賽了。所以一開始翻開 3 點，並不帶領你去取勝，反而領你到失敗的絕路。

那麼，遊戲二有否必勝的法則呢？答案是肯定的，而且跟遊戲一的一樣使用「同餘數」。不過這次要詳細的羅列所有可能出現的「翻動」。筆者認為搜尋答案是一種樂趣，故不打算完全剝奪讀者發掘的興趣。在此，僅指出若先翻開 3 點、4 點或 6 點者必敗；而先翻開 1 點、2 點或 5 點者可勝。

遊戲三（雙雙對對）的遊戲規則是不限制每次提取棋子的數量。因此，「同餘數」概念的必勝法則用不上了。它的必勝法則是「成對」這個數學概念。只要製造兩堆棋子成雙成對的話，對手提

取多少棋子，你照樣提取多少，那便必勝無疑了。透過實戰和將情況簡化，小學五、六年級的學生也能掌握箇中道理。譬如：面對(2,2)即每堆均有 2 顆棋子時，是否勝負已定呢？面對(3,3)又如何呢？(4,4)又如何？「自我發現法」的好處是不用多加解釋，便能掌握結果，而且十分深刻。這次不妨介紹「成對」這個數學名詞。因爲遊戲四中經常使用這個名詞。

遊戲四（拈）的必勝法則原理跟遊戲三的相同，使用的亦是「成對」的數學概念。但遊戲四中，共有三堆棋子，而非兩堆棋子，如何才算成對呢？最簡單的是將其中一堆全部取去，那麼便與遊戲三相同了。事實上，往往不能同一時間除掉一堆棋子而且令到餘下兩堆棋子數量相同。另一個自然的想法莫過如最多的一堆與其餘兩堆的和成對。譬如：(2,5,7)即 2+5=7；(1,3,4)或(2,3,5)。這是一個很好的猜想，不妨讓學生進行一些實戰來驗証這個猜想。當然這個猜想並不正確，原因是這樣任意地成對後，對手亦可以將三堆棋子再次成對。舉個例來說明：(2,3,5)是成對的，對手可以提取第三堆 5 顆棋子中的 4 顆，變成爲 (2,3,1)。

至於，正確的「成對」方法是要先將每堆棋子的數目以二進制的位值 1、2、4、8、16 等等形式地分成若干小堆，然後再將它們成對。這樣的成對稱之爲「二進成對」。當棋子是「二進成對」時，要再次以這樣形式成對的話，必須同時在兩堆棋子中提取才可以辦得到。若只想任意成對的話，當然可以做到，但最終仍被迫面對「二進成對」的局面。舉例來說：將(2,5,7)以二進制位值分成小堆得到([2]，[1][4]，[1][2][4])，故此，它是「二進成對」的。這時，誰要提取棋子，誰便輸定了。若任意地成對，從第三堆 7 顆棋子中取去 4 顆變成爲(2,5,3)，亦無補於事。因爲(2,5,3)即是([2]，[1][4]，[1][2])。這時，只要將第二堆中的[4]取去，便成爲「二進成對」(2,1,3)。面對(2,1,3)這個局面是輸定了，因爲從任何一堆中取去任何數量的棋子，對手都可以將之配成只有兩堆而且每堆棋子的數量相同(需要更多例子的可參看鄭肇楨編著的《數學遊戲》，第 8 至 17 頁)。至於「二進成對」如何巧妙地突破多於兩堆而配合成對？筆者也讓讀者自行領略。

這個巧妙的策略亦令筆者有以下的領悟：在對奕遊戲中，一個必勝的法則須具備下列條件:-

(i) 每一個局面以那個必勝法則界定，只可以界定為「勝定」局面或「輸定」局面。並沒有「平手」或「可能平手」的局面。
(ii) 任何一個「輸定」局面，經過適當的一個移動必可以成為「勝定」局面。
(iii) 每一個「勝定」局面，經過任何一個移動都必成為「輸定」局面。

遊戲五（擦線遊戲）的必勝法則亦與遊戲四的相同。它的變化實在比遊戲四更大，因為可以將原來同為一堆的棋子，經過一次移動後成為兩堆棋子。不過，「二進成對」也用得上作為遊戲五的必勝法則。

遊戲六（爭先遊戲）將「線性」的棋盤變成為「平面」的。而必勝法則由「成對」改成為「對稱」。這樣子的推廣很有趣而且很富數學味道，相信是一個很好的教材。

遊戲七（威索夫(Wythoff)遊戲）的遊戲規則可以讓對奕者在兩堆棋子中取去相同數目。故此，成對的法則不單只用不上去求勝，反而是必敗的移法。至於這個遊戲的必勝法則，透過實戰，不難獲得。值得一提的是這個必勝法則背後有一個很漂亮的數學定理。(參看亨斯貝爾格著(李忠譯)的《數學中的智巧》，R. Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*)

上述是筆者的個人經驗和嘗試，歡迎各同工提供意見和嘗試採用。

參考文獻:

1. 鄭肇楨編著(1980)。數學遊戲。商務印書館。
2. R. Honsberger (李忠譯)(1985)。*Ingenuity in Mathematics* (數學中的智巧)。北京大學出版社。

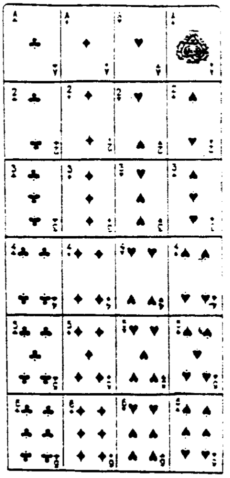
附錄

遊戲一 <爭奪三十一>

玩法: 兩人對奕遊戲。輪流從一堆(或一行)有 31 顆棋子中提取最少 1 顆，最多 3 顆。

勝負: 能夠取得最後一顆棋子者為勝方。

必勝法則: 同餘數。



遊戲二 <巧和三十一>

玩法: 兩人對奕遊戲。首先將紙牌 A 至 6 點合共 24 張依照右圖排好。排好後便將全部紙牌翻轉，使其牌面向下。兩人輪流翻開紙牌。紙牌 A 當作 1 點計算。

勝負: 能夠令翻開紙牌的點數總和爲 31 者爲勝方。若令翻開紙牌的點數總和大於 31 者爲負方，則對手爲勝方。

必勝法則: 同餘數(受限制的)。

遊戲三 <雙雙對對>

玩法: 兩人對奕遊戲。準備兩堆(或兩行)棋子，棋子的數目是任意的。兩人輪流提取棋子。每次提取棋子的數目不限，但只可以從其中一堆中提取，不能同時在兩堆中提取。

勝負: 能夠取得最後一顆棋子者爲勝方。

必勝法則: 成對。

遊戲四 <拈> 或 <讓梨遊戲>

玩法: 兩人對奕遊戲。準備三堆(或三行)棋子，棋子的數目沒有規定。兩人輪流提取棋子。每次提取棋子的數目不限，但只可以從其中一堆提取，不能同時在兩堆或以上堆中提取。

勝負: 能夠取得最後一顆棋子者爲勝方。

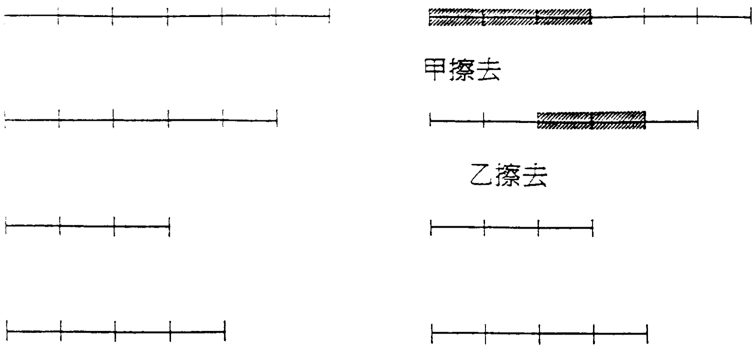
必勝法則: 成對，「二進成對」。

對初學者的建議: 開始時，將棋子排成下圖一樣:-

第一行:○○○
第二行:○○○○○
第三行:○○○○○○○

遊戲五 <擦線遊戲>

玩法: 兩人對奕遊戲。先用鉛筆在紙上作出任意線段數條，每一條線段再分成若干小段(如下左圖)。兩人輪流用擦膠擦去若干相連的小線段。擦去的小線段可以是由兩端開始，亦可以在中間開始，但必須是相連的(如下右圖)。



(開始時) (對奕中)

勝負: 最後將線段擦得乾乾淨淨者爲勝方。
必勝法則: 成對，「二進成對」。

遊戲六: <爭先遊戲>
玩法: 兩人對奕遊戲。先將棋子排成一個正方形，每邊棋子的數目並無規定。兩人輪流提取同行或同列相連的棋子，最少提取一顆，最多可以提取整行或整列，不過提取的棋子不能有空隙隔開。
勝負: 能夠取得最後一顆棋子者爲勝方。
必勝法則: 對稱。

遊戲七 < 威索夫(Wythoff)遊戲>
玩法: 兩人對奕遊戲。準備兩堆(或兩行)棋子，棋子的數目是任意的。兩人輪流提取棋子。每次提取棋子的數目不限，但必須遵守以下規則:-

(i) 只從其中一堆提取棋子；
(ii) 從兩堆棋子中提取相同數量的棋子。

勝負: 能夠取得最後一顆棋子者爲勝方。
必勝法則: ？？？