

數學 CAI 如何促進學生的發現學習

楊澤忠

上海交通大學科學史系

數學具有高度的抽象性和嚴密的邏輯性，學好數學一項有效的策略是進行發現學習。在傳統的數學教學中，指導學生的發現學習主要是靠教師的語言啓發和問題巧妙設計，現代數學 CAI 如何作做呢？本文結合筆者近年來做過的一些相關實驗擬就這個問題談幾點自己的認識。

一、注重將圖形和數位結合起來，從形和數兩個方面指導學生學習數學知識

數學是一門研究客觀事物數量關係和空間形式的科學，數學教學中，將圖形和數位結合起來，從形和數兩個方面指導學生學習數學知識，可以使學生全面瞭解數學內容，深刻理解數學知識，有助於學生綜合考慮、深入分析，準確地找到其中的數學規律，發現數學知識的特點，成功地進行發現學習。

1997 年，我們曾與一所中學的初二年級設計了一次指導學生學習三角形性質的數學 CAI 實驗。我們設計的方案是：1、使用國家教委電腦教育研究中心推廣的軟體《幾何畫板》。2、採取如下的過程：(1) 先教會學生使用《幾何畫板》畫三角形、操作三角形（即用滑鼠拖動三角形的一點或一條邊使三角形變化）、測量三角形的各個內角、測量三角形的邊長和會進行簡單的計算等；(2) 上課時，由學生自己使用《幾何畫板》，獨立進行學習。3、在學生學習時，教師可以提示學生：將三角形的長、內角測量出來，求一下它們的和與差，並將結果顯示在螢幕上。如圖 1 所示。結果，學生在很短的時間內就發現了三角形的內角和定理（三角形的內角和等於 180° ）和三角形的邊長定理（三角形的邊長兩邊之和大於第三邊，兩邊之差小於第三邊。）同時，學生也發現了關於三角形的其他一些性質，如三角形的各個內角都小於 180° 、三角形的兩個內角之和（差）不一定大於（小於）另一個內角等。

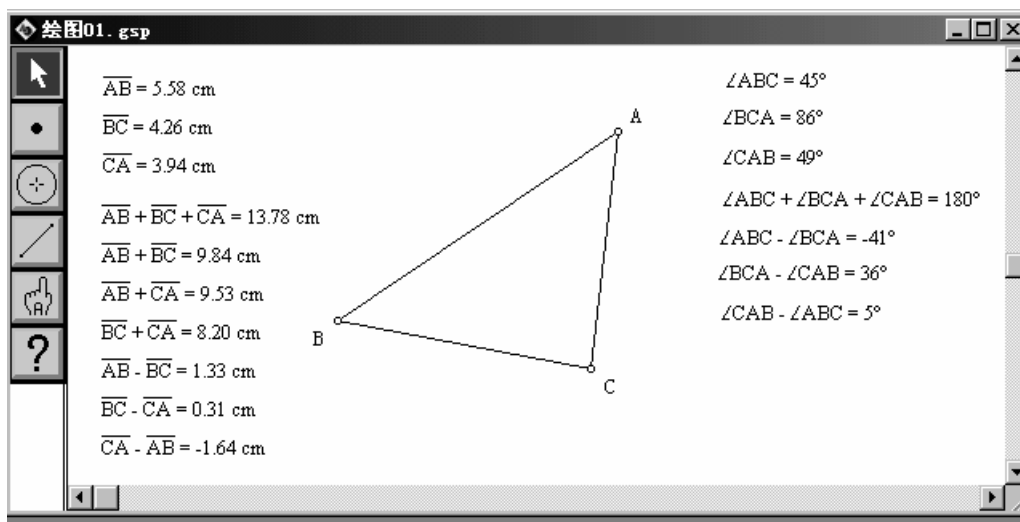


圖 1

第二年我們又與這個年級設計了一次學習二次函數圖像的數學 CAI。這次我們設計的方案是：1、使用我們自己編制的軟體。我們編制的軟體的特點是：(1) 能靈活地生成二次函數的圖像，既可用輸入三個係數的方式生成二次函數的圖像，也可用微調按鈕調整已有的二次函數的三個係數大小的方式生成二次函數的圖像。(2) 能用滑鼠對函數圖像的開口方向、大小和頂點的位置任意調整。如打算讓開口朝上的拋物線開口朝下，只需用滑鼠向下拖動拋物線一側的端點即可。(3) 拋物線在變動時，與之對應的顯示在螢幕上的二次函數的三個係數隨時進行變化。2、軟體的使用者主要是教師。3、使用過程為：(1) 教師首先按傳統方式給學生講解二次函數的定義和解析式。(2) 使用軟體給學生全面演示二次函數的圖像，即用各種方式給學生呈現二次函數圖像，反復呈現函數圖像。結果，學生很快就看出了性質：二次函數的圖像是一條拋物線；拋物線的開口方向與二次項的係數的符號有關係，二次項的係數大於零時，拋物線的開口朝上，反之朝下；拋物線的開口大小與二次項係數的大小有關，當二次項係數大於（小於）零時，二次項係數越小（大），開口越大，反之也成立。最可貴的是，學生通過上述演示還發現了二次函數與一次函數之間的關係，認識到了一次函數是二次函數的特例，因為當二次函數的二次項係數為零時，拋物線就變成了一條直線。

二、注重數學軟體的靈活性

數學軟體的靈活性是指數學軟體能盡大可能地滿足學生關於數學學習的各種需要，能在各個方面幫助學生學習。如一個幫助學生學習平面幾何的數學軟體，在生成三角形時，不僅能自動生成，而且還能用滑鼠或鍵盤操作畫出三角形，不僅能按照缺省的設置生成三角形，而且也能按照一定的要求——如大小要求、位置要求、色彩要求、線形要求等——生成；不僅能生成任意的三角形，而且也能生成特殊的三角形，如等腰三角形、等邊三角形、直角三角形、鈍角三角形等等。這樣這個軟體就具有了一定的靈活性。

一個數學軟體具有較強的靈活性，可以給學生提供一個隨意寬鬆的環境，使學生對數學知識能進行多方面的探討。從而有助於學生區別不同的知識，找到相關知識之間的聯繫，發現其中的規律，促進學生的發現學習。

1998年，我們曾對一所中學的高一年級學生做過一次小型的數學CAI實驗，使用的是自己編制的軟體。這個軟體是幫助學生學習對數函數圖像的，它的特點是：1、能做任意區間的指數函數圖像。2、坐標系與函數圖像能任意放大和縮小。3、坐標系和函數圖像能在螢幕上任意移動。（由此可見，這個軟體具有相當的靈活性。）當時我們設計的是讓學生使用這個軟體。結果，上課時，學生非常喜歡這個軟體，不少學生在很短的時間內就獨立地發現了課本上列出的所有的對數函數的性質。我們調查了一個學生是如何發現對數函數 $y = \log_a x (a > 0)$ 是增函數的，他回答說：我將坐標系移到螢幕的上方，在 $(0, 1]$ 這個區間上作了3個函數圖像，發現它們都是向右上方彎曲的，我又將坐標系移到螢幕的左下方，在 $[1, 10]$ 這個區間上作了3個函數圖像，發現它們也都是向右上方彎曲的，接著我將坐標系縮小到原來的 $\frac{1}{5}$ ，在 $[1, 50]$ 這個區間上作了3個函數圖像，發現它們也都是向右上方彎曲的，之後我又將坐標系縮小到原來的 $\frac{1}{10}$ ，在 $[1, 100]$ 這個區間上作了3個函數圖像，發現它們也都是向右上方彎曲的，由此我認為這類函數是增函數的。由此可見，教學軟體的靈活性在學生的發現學習中起著重要的作用。

三、增強數學軟體的可參與性，使學生融入到軟體的教學中

增強數學軟體的可參與性即是在軟體的開發過程中，增強人機交互的機會，增加人機交互的方式，讓學生在使用軟體的過程中，不僅僅只能通過回車鍵和少數的幾個數位鍵進行輸入，不僅僅只能通過選擇或填空進行學習。要使學生不僅能用功能鍵、數位鍵，而且還能用其他的字母鍵，能用滑鼠。要使學生不僅能通過選擇、填空學習，而且還能通過其他的方式進行學習，如用滑鼠在螢幕上畫圖形、移動函數圖像、寫入簡單的字元和文字等。

增強數學軟體的可參與性，不僅可以吸引學生的注意力，增強學生學習的興趣，激發學生學習的動機，提高學生學習數學的積極性，提高學生的動手能力，而且由於學生是在「做」中學習數學的，所以還可以幫助學生更好地認識數學物件，深刻而準確地理解數學知識。從而促進學生更好地進行發現學習。本世紀 60 年代，美國的 Seymour Papert 教授開發的《海龜幾何》就是一個很好的例子。《海龜幾何》軟體曾被當時的許多國家的中小學生廣泛接受和應用，在應用過程中，世界各國的中小學生獨立地發現了許多平面幾何中的定理。90 年代初，美國人 Scotte 和 Nick Jackiw 開發的《幾何畫板》(The Geometer's Sketchpad) 也是個很好的例子。據報道，1995 年夏季學期，兩個美國初中二年級學生 David Goldeheim 和 Dan Litchfield 應用《幾何畫板》發現了一個新的任意等分線段的方法，東北育才學校一名學生應用《幾何畫板》獨立地發現了廣義蝴蝶定理。由此可見，增強軟體的可參與性，使學生能融入到軟體的教學中，使學生能在「做」學習數學對於促進學生的發現學習非常重要。

四、恰當地應用動畫，科學地表現數學變化

數學尤其是現代數學，不僅研究靜態的事物，而且也研究動態的事物，數學中有許多概念、公式、定理等都是從運動的現象中抽象出來的。因此，數學 CAI 要幫助學生更好的發現學習，有必要恰當地運用電腦的動畫功能，準確地再現數學抽象物的運動，科學地表現其中的變化，給學生提供原始的資料，讓學生不僅獲得靜態的個別的資訊，而且也獲得動態的連續的資訊。讓學生多獲得些連續的動態的資訊，可有助於學生瞭解眾多數學

物件之間的關係，瞭解不同數學概念、定理、公式之間的差別，找到某個數學概念或數學定理的內部發展規律，從而有助於學生發現更多的有用的數學知識。

在一次三角函數（主要是正弦函數）的教學中，我們使用了具有如下功能的一個軟體：1、能生成任意區間的任一正弦函數圖像。2、軟體一運行便自動生成一個 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的圖像，如圖 2 所示。3、其他正弦函數圖像都可由這一函數圖像慢慢地連續地變化而成，如 $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$, $x \in [0, 4\pi]$ 的圖像，可以由「 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的圖像經過慢慢地連續地向左移動 $\frac{\pi}{3}$ ，然後圖像的左端點不動，右端點慢慢地連續地移動到 $\frac{11\pi}{3}$ 點，再然後振幅慢慢地連續地擴大到 2」而成。4、不同的函數圖像以不同的顏色標示出來。結果，學生很自然地就得出下面的結論：函數 $y = A \sin(ax + \varphi)$ 的圖像可以由函數 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的圖像向左（ $\varphi > 0$ ）、右（ $\varphi < 0$ ）平移 $|\varphi|$ 個單位，周期擴大或縮小到 $\frac{2\pi}{\omega}$ ，振幅擴大或縮小到 A 而得到。而這在傳統的數學教學中是很難做到的。

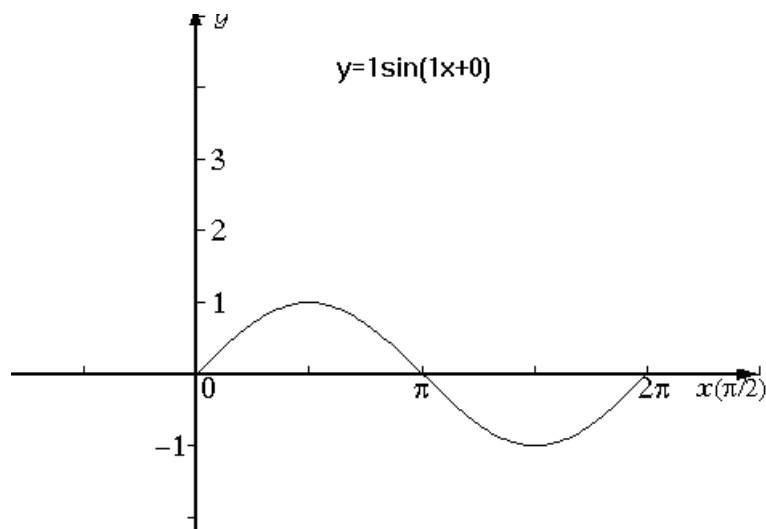


圖 2

五、加強聲音、色彩等多媒體的應用

也許是數學比較抽象和枯燥的原因，目前的數學軟體中，不少並不太注意聲音、色彩等多媒體的應用。其實聲音、色彩等多媒體是激發學生數

學學習興趣調動學生積極性的有利工具。不僅如此，實踐證明，在數學教學中，它還有促進學生發現學習的功能。在我們的進行的數學 CAI 中，我們常用不同的色彩來標示不同的文字、圖像、圖形等，常用不同的聲音引導學生學習的方向，促進學生的發現學習，我們發現效果非常明顯。如一次有位學生使用上面提到的三角函數學習軟體之後，發現了如下結論：1、函數 $y = A \sin(ax + \varphi)$ 中的 A 和 ω 接近 0 時，圖像與 x 軸非常接近，幾乎重合。2、 A 和 ω 均可以為負數。（這是課本上沒有的內容，也是中學數學教學不要求學生瞭解的內容。）我們問他是如何發現的，他回答到：一開始並未注意這個問題，只是覺得 A 和 ω 一變化，函數圖像的顏色就發生變化，很有意思，後來就想看看當的 A 和 ω 越來越小逐漸為零的時候函數圖像的顏色是甚麼樣子， A 和 ω 是負數的時候函數圖像的顏色是甚麼樣子，由此導致了上面的性質的發現。所以說，電腦多媒體的應用對於促進學生的數學學習具有其他方法不可替代的作用，它能有力地促進學生的數學發現學習。

綜上所述，我們認為，利用數學 CAI 促進學生的發現學習是可行的，關鍵是在進行數學 CAI 時要綜合考慮多方面的因素，要充分發揮電腦技術和多媒體技術的功能特點，科學的表達數學知識，巧妙的引導學生，給學生提供一個靈活自由的環境，使學生能在「做」中學，能充分發揮自己的主動性，能就某一項知識做全面的深入的探索，只有這樣才能真正促進學生的發現學習。

參考文獻：

1. 楊澤忠「改進課件設計，提高函數圖像教學效果」《數學教育學報》2001.3
2. 楊澤忠「進行 CAMI 應注意的幾個問題」《山東教育》2000.3。
3. 胡欣潔「製作 CAI 課件時應注意的幾個問題」《中國電化教育》1999.7。
4. 師書恩《電腦輔助教育基本原理》電子工業出版社 1995.11。
5. 人民教育出版社中學數學室《數學》人民教育出版社 1996.12。