

為何需要有理化？

梁子傑

香港道教聯合會青松中學

在課程之中，我們經常要求學生將答案有理化，即將分母的根號或複數「倍大」，使它成爲一整數，例如：我們將 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 改寫成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。雖然「有理化」這個術語多數在高中的課本才會出現中，但實際上，在初中的課文之中，例如：在計算 $\sin 45^\circ$ 或 $\tan 30^\circ$ 時，就已經出現了有關的想法和要求。當教到這個內容時，學生很自然地就會提出一個疑問：爲甚麼我們需要有理化呢？

學生出現這個疑問，是很容易理解的。譬如：在計算 $\sin 45^\circ$ 時，我們從一個直角等腰三角形出發，很容易就得到 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的結果，而且答案看起來亦相當簡單，那麼，我們爲何要多此一舉，將分子分母同時倍大 $\sqrt{2}$ 倍成爲 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 呢？這樣不單多了一重手續，而且更令答案變得複雜，我們不是經常強調，要將答案化簡嗎？

個人認爲，我們需要將分母有理化，是基於兩個原因。首先，大家應想想：有理化後的分數，到底是比之前的複雜了，還是簡單了呢？假如我要求你祇准用紙和筆去計算 $\sin 45^\circ$ 的數值，你會選擇用 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 還是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 來進行計算呢？

不用多想，我相信大家都會選擇後者。因為如果我們選擇 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，由於 $\sqrt{2}$ 本身是一個無理數，將 1 直接除以 $\sqrt{2}$ 是非常困難的，如果我們取 $\sqrt{2}$ 的位值太少，那麼除出來的結果就不可靠；如果我們取位值太多，那麼即使要進行一兩步除法，亦要花很多時間。相反，利用 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 進行運算就不同了，由於我們的分母（即除數）是一個整數，除法的運算可以很順利地進行，而且祇要我們對被除數（即 $\sqrt{2}$ ）小數點後每一個位的數值有清楚的瞭解，那麼我們就可以求得 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 小數點後每一個位的準確值！

或者大家會反問：現時我們都使用了電子計算機和電腦，繁複的計算可以由機械去做，我們又何必擔心這問題呢？不過，請大家細心地想想，以上所討論的問題，即使使用了機械，其實都依然出現！我認為，機械計算比人手快，並不表示它總能夠計得準！如果我們輸入的算式是 “ $1 \div \sqrt{2}$ ” 而並非 “ $\sqrt{2} \div 2$ ”，那麼我估計，計算出來的結果仍然會有差別。因此，我認為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 其實比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 簡單，而「有理化」的工作和「化簡」的工作，是互相相容而非互相矛盾的。

我支持將分母有理化的第二個原因，是有理化後的結果更易於想象和理解。 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 表示將一個蛋糕分成兩分，而我就取去當中的 $\sqrt{2}$ （即大約 1.414）分，整個想法是非常清晰和合理的。但 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 就表示將一個蛋糕分成 $\sqrt{2}$ 分，然後取去當中的 1 分，你能夠理解我在說甚麼嗎？