一個立方和問題 — 沒有試算表便寸步難行的數學觀察

黃志華

有些同學只喜歡推理，不喜歡計算，更不喜歡小數點，認爲計算沒有多少學問。其實，計算和迭代都有深刻的學問。許多重大的科學現象，都是在計算機幫助下發現的。美國物理學家非根鮑姆「玩」計算機入了迷，爲開創混沌理論作出了重大貢獻，就是生動的例子。

——王則柯《計算的複雜性》

研究數學不離觀察，但有時某些數學問題要做觀察就得做大量重覆的計算工作，這不但是令人很疲累的事，而當數值稍大，過去往往因爲受制於計算工具的能力，沒能夠計算下去，只好作罷。不過，在電腦非常普及的今天，有了電腦試算表，那便不可同日而語。

好比說要檢查一個八位奇數是否素數，過去要是沒有素數表，單用普通袖珍計算器去檢驗，乃是十分煩瑣的事。而今有了電腦試算表，這樣的檢驗工作只消一、兩分鐘就有結果。又如解同餘式，一個簡單的二次同餘方程，只要模m稍大，例如是個三、四位數，解起來便甚花工夫，然而現在用電腦試算表來解，模m是三、四位數完全不是問題，甚至是對同餘理論認識不大的朋友，也完全解得來。所以，如果我們偶然引導學生利用試算表來做數學觀察，應會讓學生感到很有趣味，甚至可能有所發現。

本文嘗試以一個實際問題做例子，來說明用試算表做數學觀察的便利和可行性。

大抵我們都見過這樣的立方和式子

$$3^3+4^3+5^3+(-6)^3=0$$
$$1^3+6^3+8^3+(-9)^3=0$$

不過，就以上述二式來說，竟都有

$3+4=7$，　$5+(-6)=-1$

$1+6=7$，　$8+(-9)=-1$

那麼，還有沒有別的立方和數組有類似的關係，是有有限組還是無窮組？

進一步說，以下的關係式

$$A^3+B^3+C^3+D^3=0$$
$$A+B=Un\ ,\ C+D=Vn$$

情況又如何？

研究問題，自然先研究較簡單的，所以本文也只能就比較簡單的情況做觀察和研究。

設已知整數 a, b, c, d 滿足下列二式：

(1)　$a^3+b^3+c^3+d^3=0$

(2)　$a+b=kn\ ,\ c+d=-nc$。

爲了研究除了這一組，還有沒有別的整數數組滿足(1), (2)兩式，設有整數 x, y 滿足下式：

(3)　$(a-x)^3+(b+x)^3+(c+y)^3+(d-y)^3=0$

化簡 (3) 式，得

$$(a+b)x^2+(b^2-a^2)x+[y^2(d+c)-y(d^2-c^2)]=0$$

$$x=\frac{-(b^2-a^2)\pm\sqrt{(b^2-a^2)^2-4(a+b)[y^2(d+c)-y(d^2-c^2)]}}{2(a+b)}$$

套用二次方程的求根公式，有

命 Z^2 等於根式部份，整理後有

$$4(a+b)(d+c)y^2-4(a+b)(d^2-c^2)y+[Z^2-(b^2-a^2)^2]=0$$

再次套用二次方程的求根公式，有

$$y=\frac{4(a+b)(d^2-c^2)\pm\sqrt{[4(a+b)(d^2-c^2)]^2-4[4(a+b)(d+c)][Z^2-(b^2-a^2)^2]}}{8(a+b)(d+c)}$$

命 W^2 等於根式部份，整理後有

(4) $$W^2+16(a+b)(d+c)Z^2 = 16(a+b)^2(d+c)^2(d-c)^2+16(a+b)(d+c)(b+a)^2(b-a)^2$$

顯然，(4) 式必有一組整數解 (W, Z) 使

(5) $$W=4(a+b)(d+c)(d-c)$$

(6) $$Z=(b+a)(b-a)$$

同理，若 (4) 式有 L 組整數解 $(W_i, Z_i), 1 \le i \le L$，則會有

$$a_i - b_i = \frac{-Z_i}{a_i + b_i} \quad , \qquad c_i - d_i = \frac{-W_i}{4(a_i + b_i)(c_i + d_i)}$$

(7)

$$a_i + b_i = kn \quad , \qquad c_i + d_i = -n$$

從 (7) 中應可解得 L 個同時滿足 (1), (2) 兩式的整數組 (a_i, b_i, c_i, d_i)來，當然，大前提是每對 W_i, Z_i 都應可分別被 $4(a + b)(c + d)$ 及 $(a + b)$ 整除。但是，由 (5), (6)二式看來，我們擔心地提出這個大前提是多餘的。

現設我們所知的一組整數是 (a_1, b_1, c_1, d_1)，它滿足 (1), (2)兩式，當中 $n = 1$，則由 (4) 至 (7) 式，我們可從佩爾方程

(8) $\quad W^2 - 16kZ^2 = M$

這裡 $M = 16k^2[(d_1 - c_1)^2 - k(b_1 - a_1)^2]$

求出所有滿足(1), (2) 兩式且 $n = 1$ 的整數解。

由佩爾方程的性質知道，當 k 為非平方數，(8)式有無窮組整數解，因而滿足 (1), (2) 兩式且 $n = 1$ 的整數組也有無窮多組。當 k 為平方數，則 (8) 式只有有限組整數解，而滿足(1), (2)兩式且 $n = 1$ 的整數解也會是有限的。

由 (5) 至 (8) 式，我們可說解決了 $n = 1$ 的情況，只要我們知道了一組，就可以求出無窮組或所有有限的解。但當 $n > 1$ 時又該怎辦？是否又要像上面的方法，連番套用二次方程求根公式來尋得新的不定方程，才能求得想要的數組。

幸而，我們有如下的定理：

定理一

要找滿足 (1), (2) 兩式且 $n>1$ 的整數組 $(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni})$，則我們只須求出佩爾方程　$W^2-16kZ^2=Mn^2$

其中 $M=16k^2[(d_1-c_1)^2-k(b_1-a_1)^2]$

的整數解 (W_{ni}, Z_{ni})，並從下列四個式子

$$(7)\quad \begin{aligned} a_{ni}-b_{ni}&=\frac{-Z_{ni}}{k}, & c_{ni}-d_{ni}&=\frac{W_{ni}}{4k} \\ a_{ni}+b_{ni}&=kn, & c_{ni}+d_{ni}&=-n \end{aligned}$$

即可解得 $(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni})$ 的具體數值。

證明

設 (8) 式的一組解爲 (W_1, Z_1)，即有 $(W_1)^2-16k(Z_1)^2=Mn^2$，並由此

$$a_1-b_1=\frac{-Z_1}{k}\quad,\qquad c_1-d_1=\frac{W_1}{4k}$$

解得一組滿足(1), (2)兩式且 $n=1$ 的整數組 (a_1, b_1, c_1, d_1)，由 (7) 式，有

現設 $n>1$， $a_n=na_1$, $b_n=nb_1$, $c_n=nc_1$, $d_n=nd_1$

易知有　$a_n^3+b_n^3+c_n^3+d_n^3=0$

$$a_n+b_n=n(a_1+b_1)=kn$$
$$c_n+d_n=n(c_1+d_1)=-n$$

以及

$$a_n - b_n = n(a_1 - b_1) = \frac{-Z_1 n}{k} \quad , \qquad c_n - d_n = n(c_1 - d_1) = \frac{W_1 n}{4k}$$

不難發現 $(W_1 n, Z_1 n)$ 乃下述佩爾方程的一組整數解

(9)　$W^2 - 16kZ^2 = Mn^2$

可見，我們只要從 (9) 式的某一組整數解 (W_{ni}, Z_{ni}) 出發，就可以找出一組整數 $(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni})$ 滿足 (1), (2) 兩式且 $n > 1$。並有

$$a_{ni} - b_{ni} = \frac{-Z_{ni}}{k} \quad , \qquad c_{ni} - d_{ni} = \frac{W_{ni}}{4k}$$

定理一到此基本上得到證明。但我們還有一個問題是 (9) 式的解中，須存在某對解 (W_{ni}, Z_{ni}) 令 $\left(\frac{W_{ni}}{4k}, \frac{Z_{ni}}{k}\right) = 1$

則我們求得的整數組 $(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni})$ 才是既約的，可是我們現時並不知道 n 爲何值才會得到既約的數組。

推論

設由定理一提供的方法找到一組整數 a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni} 滿足(1), (2) 兩式且 $n > 1$，$(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni}) = 1$，則由 (4) 至 (6) 式，應有

$$W' = 4kn^2(c_{ni} - d_{ni}) \quad , \qquad Z' = -kn\,(a_{ni} - b_{ni})$$

這裡 (W', Z') 乃

$W^2 - (16kn^2)Z^2 = M_n$ 的某一組整數解，$M_n = 16k^2n^4[(d_{ni} - c_{ni})^2 - k(b_{ni} - a_{ni})^2]$

則有

$$W' = 4kn^2 \times \frac{W_{ni}}{4k} = n^2 \times W_{ni}$$

$$Z' = -kn \times \frac{-Z_{ni}}{k} = n \times Z_{ni}$$

純粹的理論研究到此，看來也差不多，該可以使用上面的結果來做實際的計算和觀察，尤其是實在很焦急想看看 n 為何值才可得既約的數組。

但筆者卻要叫聲：『且慢！』

因為經仔細觀察，發現在 (8) 式中其實還藏有另一個佩爾方程！事實上，該式中 M 是常數，即是一個定值，所以我們有

$$(10) \quad P^2 - kQ^2 = \frac{M}{16k^2} = (d_1 - c_1)^2 - k(b_1 - a_1)^2$$

相比起 (8) 式，(10) 式的數值自是小了很多，雖然我們有電腦試算表幫助，但還是數值小的算起來方便些嘛。模仿上文的推導，從 (10)式出發，我們不難得到以下的關係式和定理。

命 $R = (d_1 - c_1)^2 - k(b_1 - a_1)^2$ ，則 (10) 式變為

$$P^2 - kQ^2 = R$$

設 (P_i, Q_i) 為 (10) 式的一組既約的整數解，則可從

(11)	$a_i - b_i = -Q_i$	, $c_i - d_i = P_i$

(12)	$a_i + b_i = k$	, $c_i - d_i = -1$

可解出一個滿足 (1), (2) 式，n = 1 的既約整數組(a_i, b_i, c_i, d_i)。而從

$$P^2 - kQ^2 = Rn^2$$

的一組既約整數解 (P_{ni}, Q_{ni})，則可由

(13)	$a_{ni} - b_{ni} = -Q_{ni}$,	$c_{ni} - d_{ni} = P_{ni}$

(14)	$a_{ni} + b_{ni} = kn$,	$c_{ni} - d_{ni} = -n$

解出一個滿足 (1), (2)式且 $n > 1$ 的既約整數組 $(a_{ni}, b_{ni}, c_{ni}, d_{ni})$。

要說句對不起的是，本文從開始寫到這裡，都沒有談過佩爾方程該如何解，其理論又如何？可是這些實在不可能在本文的短短篇幅中交代得來的，只好請讀者自行參考有關的著作，如潘承洞、潘承彪著的《初等數論》或柯召、孫琦著的《談談不定方程》。話說回來，用電腦試算表解佩爾方程，卻不需要甚麼理論，誰也能很快便想到該如何布置數據及運算，只是當要把一大串數同時作開方的運算，也許需要一點竅門罷了。即以 $P^2 - kQ^2 = Rn^2$ 這個方程來說，最多需要學學解二次同餘方程 $P^2 \equiv Rn^2 \pmod{k}$ 以大大減少需要檢驗的 P 值的個數。不過我們這裡的 $k = 7$，用筆算都可以很快得出這個二次同餘方程的解來哩。何況，如文首所說，用電腦試算表來解簡單的二次同餘方程，是很容易的事，不熟悉同餘理論也做得來。

好了，現在終於可以做計算和觀察的工作。首先，是從我們已知的一個整數組 (3, 4, 5, –6) 來算出 R 的值：

$$R = (-6 - 5)^2 - 7(4 - 3)^2 = 114$$

接下來，須從

(15) $\quad P^2 - 7Q^2 = 114$

的既約整數解通過 (11), (12) 式來求出滿足 (1), (2) 二式而 $n = 1$ 的既約

整數組。

筆者算得 (15) 式有兩類基本解：(11, 1), (17, 5)，都是既約的，每類基本解都有兩個結合類，故據佩爾方程的理論，(15) 式的所有解可表爲

$$P + Q\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^{s}(11 \pm \sqrt{7})$$

$$P + Q\sqrt{7} = (8 + 3\sqrt{7})^{s}(17 \pm 5\sqrt{7})$$

其中 $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$。

下表是 (15)式最小的十二組解及由此解出的整數組(a_i, b_i, c_i, d_i)。

(P_i, Q_i)	(a_i, b_i, c_i, d_i)
(11, 1)	(3, 4, 5, −6)
(17, 5)	(1, 6, 8, −9)
(31, 11)	(−2, 9, 15, −16)
(67, 25)	(−9, 16, 33, −34)
(109, 41)	(−17, 24, 54, −55)
(241, 91)	(−42, 49, 120, −121)
(279, 81)	(−87, 94, 239, −240)
(1061, 401)	(−197, 204, 530, −531)
(1733, 665)	(−324, 331, 866, −867)
(3839, 1451)	(−722, 729, 1919, −1920)
(7633, 2885)	(−1439, 1446, 3816, −3817)
(16909, 6391)	(−3192, 3199, 8454, −8455)

現在，我們最關注的是，$n > 1$ 時的情況如何，n 在哪些值時能使

(16)　　$P^2 - 7Q^2 = 114n^2$

有既約的整數解？ 以下是筆者用試算表實際計算的結果：

$n = 2$ 有兩類基本解 (22, 2), (34, 10)，皆非既約的。

$n = 3$ 有四類基本解 (33, 3), <u>(37, 7)</u>, <u>(47, 13)</u>, (51, 15)，其中有底線的

兩類是既約的。

$n=4$ 有兩類基本解 (44, 4), (68, 20)，皆非既約的。

$n=5$ 有兩類基本解 (55, 5), (85, 25)，皆非既約的。

$n=6$ 有四類基本解 (66, 6), (74, 14), (94, 26), (102,30)，皆非既約的。

$n=7$ 有兩類基本解 (77, 7), (119, 35)，皆非既約的。

$n=8$ 有兩類基本解 (88, 8), (136, 40)，皆非既約的。

$n=9$ 有六類基本解 <u>(97, 5)</u>, (99, 9), (111, 21), (141, 39), (153, 45), <u>(197, 65)</u>，其中有底線的兩類是既約的。

從 $n=9$ 算到 $n=9$，可以觀察到的是，若 n 不能被 3 整除，則其 (16) 式的基本解只是把 $n=1$ 時的基本解乘了一個倍數。另一個可以觀察到的規律是，似乎只有 n 是 3 的某個方次，(16)式才有既約的基本解。

這樣，我們就試試算算 (16) 式在 $n=27$ 的情況，結果得出八類基本解，其中既約的有兩類：(347, 73), (353, 77)。又試試算 $n=81$ 的情況，結果得出十類基本解，其中既約的也是有兩類：(877, 55), (1727, 565)。由此我們應可肯定，n 是 3 的某個方次時，(16) 式會有既約基本解。但爲何如此？除了 3 的方次，還有沒有別的 n 可使 (16) 式有既約解？

憑藉對數字的敏感，筆者把 114 作因數分解，乃是 $2\times3\times19$，直覺覺得 19 也許是我們值得試試的 n。果然，當 $n=19$，(16)式又見有兩類既約的基本解：(223, 35), (379, 121)。筆者還乘勝追擊的算出，當 $n=19^2=361$，

(16) 式有兩類既約的基本解:(3859, 71), (5311, 1381)。當 $n = 3\times19 = 57$, (16) 式有兩類既約的基本解:(647, 83), (781, 185)。

現在，我們似乎可以肯定，只有當 $n = 3^{\alpha}19^{\beta}$，(16) 式才會有既約的基本解。

再者，從上述的數據顯示，我們還有以下的定律：

定理二

設 $P^2-7Q^2 = 114(g^{\alpha})^2$ 之某一基本解 $(P_{\alpha i}, Q_{\alpha i})$，而 $(P_{\alpha i}, Q_{\alpha i}) = g^{\alpha-i}$，

$0\le j\le\alpha$ ，則 $\left(\dfrac{P_{\alpha i}}{g^{\alpha-j}}, \dfrac{Q_{\alpha i}}{g^{\alpha-j}}\right)$是 (16) 式當 $n = g^j$ 的既約解。

這裡 $g = 3$ 或 19。

這個定理恕筆者未能給出證明，而爲了多找些實例來證實一下這個定律的存在，我計算出 $P^2 - 7Q^2 = 114\times2187^2 = 545258466$ (這個不定方程可夠巨型，用電腦試算表去算都要十分八分鐘才搜索得出所有的基本解，若用筆和袖珍計算器，相信花一整天都未必得到全部而準確的結果）的十六類基本解及其最大公約數：

(23571，1215) =243	(28593，6237) =81
(23679，1485) =27	(34263，9477) =729
(23893，1913) =1	(35037，9873) =9
(24057，2187) =2187	(36321，10515) =3

（24243，2463）=3	（37179，10935）=2187
（26577，4797）=9	（38071，11365）=1
（26973，5103）=729	（46629，15255）=27
（28107，5913）=81	（47871，15795）=243

現在以（24243，2463），（36321，10515）這兩類基本解爲例，按我們歸納出的規律，這兩類解約去最大公約數 3 之後，應爲 (16) 中 $n = 3^{7-1}$ 的既約基本解，由此可以解出滿足(1), (2)兩式且 $n = 3^6 = 729$ 的整數組。事實上，從

$$\begin{aligned} a - b &= -(2463 \div 3) \\ a + b &= 5103 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c - d &= 24243 \div 3 \\ c + d &= -729 \end{aligned}$$

解得整數組（2141，2962，3676，－4405），又從

$$\begin{aligned} a - b &= -(10515 \div 3) \\ a + b &= 5103 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c - d &= 24243 \div 3 \\ c + d &= -729 \end{aligned}$$

解得整數組（799，4304，5689，－6418），它們確實滿足(1), (2) 兩式且 $n = 3^6 = 729$。

從一個方程裡可求得多個相關方程的解，實在美妙。而這乃是佩爾方程的一個特色。

然而，說到底，直到現在，我們都只是『似乎』地覺得當 $n = 3^{\alpha}19^{\beta}$，(16)式才會有既約解，語氣毫不肯定。數學研究容不下這種『不肯定』，這

種『不肯定』帶給我們的信息是：『我們還得繼續努力觀察下去！』

事實上，當我們不懈地觀察下去，會發覺當 n = 29, 31, 37, 47, 53, 59, 83, ... 等素數時，(16)式都有既約解。說得正確一點，只要 7 是某一個 n 的平方剩餘，則這個 n 就會使 (16) 式產生既約解。即當

$$n = P_1^{S_1} P_2^{S_2} \cdots P_i^{S_i}$$

其中每一個 P_t $(1 \le t \le i)$ 皆是奇素數且滿足

$$(17) \qquad P_t \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \pmod{28}$$

則這個 n 便能使 (16) 式有既約解。而上述定理二中的 g 當然不僅是 3 或 19，而是任一滿足 (17) 式的奇素數都行。

但要是問，爲何這樣的 n 能使 (16) 式有既約解？這卻是佩爾方程理論的一部份，恕難在此詳細交代。事實上本文旨在說明利用電腦試算表來做計算和觀察，可以發現不少有趣的規律，但若問爲何會有這樣？則可能超越一般學生的理解能力。然而這些理論問題亦說明人對數學的思考是電腦所不能取代的！

本文寫到這裡，也近尾聲了，然而這個立方和問題本身其實還值得繼續探討的，因爲我們對它所知的看來未算全面。例如從 $26^3 + 55^3 + 78^3 + (-87)^3 = 0$ 可知，當 $k = n = 9$ 的時候，有整數組滿足(1), (2) 兩式。但這樣想是錯的，因爲我們將會發覺，若 $k = 9$，則 $n = 1$ 和 3 時都無解。所以，$26^3 + 55^3 + 78^3 + (-87)^3 = 0$ 滿足的應是

(18) $A^3 + B^3 + C^3 + D^3 = 0$

(19) $A + B = Un,\qquad C + D = Vn$

其中 $U = k^2 = 81, V = -k = -9, n = 1$。

其相關的佩爾方程是

(20) $P^2 - 9Q^2 = 19656\times n^2$

與上面的情況略有不同的是，9 是平方數，意味對於每個整數 n，(19) 式都只有有限個解，亦即對於每個整數 n，滿足 (17), (18) 的數組也只有有限組。由於 9 是平方數，要用筆算來解 (19) 式會比較繁瑣，反而用電腦試算表卻可以『一本通書看到老』，以不變應萬變。幸而，除了以上這點點不同，其他情況卻跟上面探索過的規律還是相若的。

又好比說，從 $3^3 + 18^3 + 10^3 + (-19)^3 = 0$ 可推出 $U = 21, V = -9$，而其相關的佩爾方程是

(21) $(3P)^2 - 21Q^2 = 2844\times n^2$

有趣的是，n = 2 的既約解是已包含在 n = 1 的未約解之中的，這是以上的案例中所沒有的。讀者有興趣的話可以自行算算看。

由此可見，我們對這個立方和問題的探索遠遠未到終結呢！

末了，想不厭其煩的說說，隨著像電腦試算表這樣先進的計算工具的大大普及，一位普通中學生都有可能憑它發現一些新的數學規律，所以我們很應該鼓勵學生多利用它來走近數學，玩味數學。