興趣是動力
— 記一位業餘數學愛好者的發現

黃志華

數學課的目的是甚麼？

除了教授數學知識，另一大目的肯定是培育學生對數學的興趣。興趣往往就是動力，讓人鍥而不捨的追求或解決某些東西或問題。

本文正要介紹一位憑興趣做出了好些有趣發現的業餘數學愛好者。他的名字叫韓湛新，居於廣州，當年由於文革的影響，讀書只讀至中一程度，但經過自身的努力，現在是一所工廠的會計，而業餘嗜好是數學。近年他看了幾本如《趣味數學辭典》、《數論妙趣》、《數：上帝的寵物》等書，對等冪和這種數學現象入了迷。

在筆者未開始跟他通信前，他已獨立發現了等冪和的『升冪定理』。
他是用實例來陳述的，例如從如下數組

$$[1,5,6]_2 = [2,3,7]_2 \qquad (1)$$

（筆者按：有關等冪和符號的意思可參見《數學數育》第六期第七十七頁的相關文章或一般數論書籍的介紹）

他首先計算（1）式中兩組數的三次方和之差：

$$(2^3+3^3+7^3)-(1^3+5^3+6^3)=36$$

然後把（1）式兩組數全加以同一個整數，比方說是 5，他算得

$$[(2+5)^3+(3+5)^3+(7+5)^3]-$$
$$[(1+5)^3+(5+5)^3+(6+5)^3]=36$$

既然兩式相等，即表示

$$(2^3+3^3+7^3)-(1^3+5^3+6^3)=(7^3+8^3+12^3)-(6^3+10^3+11^3)$$

整理後有 $2^3+3^3+10^3+11^3=1^3+5^3+8^3+12^3$

事實上，這兩組數不僅三次方和相等，一、二次方和也相等，即有

$$[2,3,10,11]_3 = [1,5,8,12]_3$$

韓氏在這裡所展示的就是等冪和的『升冪定理』。其嚴格的數學陳述應是，若已知 $x_1, x_2, \ldots x_s$; $y_1, y_2, \ldots y_s$ 是 h 次等冪和，即有

$$[x_1, x_2, \ldots, x_s]_h = [y_1, y_2, \ldots, y_s]_h$$

則對於任一整數 d，必有

$$[x_1, x_2, \ldots, x_s, y_1+d, y_2+d, \ldots, y_s+d]_{h+1}$$
$$= [y_1, y_2, \ldots, y_s, x_1+d, x_2+d, \ldots, x_s+d]_{h+1}$$

限於數學知識水平，韓氏沒能力去證明這個『升冪定理』(有興趣的讀者可參閱陳景潤在《初等數論》第三集中用二項式定理所給出的證明，見該書 364~366 頁)，但他能通過自己的研究而獨立發現了這個規律，亦很不簡單了。

由於筆者亦很喜歡研究等冪和問題，故年前開始跟他通起信來，通信不久，他便陸續有新的發現。

例如當我告訴他，我發現了二次及三次連環等冪和的實例(讀者可參見《數學教育》第七期 83 頁筆者所舉的兩個實例)，可是暫時沒能發現四次及以上的連環等冪和的實例。誰料他在回信中即給出了實例：

$$\begin{aligned}&[1,12,13,14,15,22,24,26,28,35,39,41]_4\\&=[2,9,11,16,18,20,25,27,29,34,36,43]_4\\&=[4,6,10,17,19,21,23,30,31,32,33,44]_4\end{aligned} \quad (2)$$

$$[1,12,13,14,15,22,24,26,28,35,39,41,48,50,54,61,63,65,67,74,75,76,77,88]_5$$
$$=$$
$$[2,9,11,16,18,20,25,27,29,34,36,43,46,53,55,60,62,64,69,71,73,78,80,87]_5$$
$$=$$
$$[4,6,10,17,19,21,23,30,31,32,33,44,45,56,57,58,59,66,68,70,72,79,83,85]_5 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

很明顯，（3）式的五次三組連環等冪和是從（2）式的四次三組連環等冪和『升冪』而得。不過，多組連環等冪和居然也可以套用『升冪定理』，這是我從未想過的。此外，也看不通（2）式的這個四次三組連環等冪和是怎樣得來的，只好向韓氏請教。

原來，他在研究構作二、三次連環等冪和數組時，發現了如下的特例：

$$[1,12,14]_2=[2,9,16]_2=[4,6,17]_2 \qquad (4)$$

這個特例的特別之處是：這三組數不但是二次連環等冪和的關係，把它們排列成如（4）式的模樣，還可發現，它們還有類似幻方的性質，那就是除了橫排的三行數各自的和是 27 外，其兩條對角線之和及中線三個數之和皆是 27，即

$$1+9+17=27 \qquad 4+9+14=27 \qquad 6+9+12=27$$

此外，（4）式還有這樣的性質

$$(4^3+6^3+17^3)-(2^3+9^3+16^3)=(2^3+9^3+16^3)-(1^3+12^3+14^3)$$

所以，它能夠應用『升冪定理』，使之由二次連環等冪和升爲三次連環等冪和，例如

$$[1,12,14,13,15,26]_3=[2,9,16,11,18,25]_3=[4,6,17,10,21,23]_3 \qquad (5)$$

從（5）式，不難知道（2）式是怎樣推算出來的。然而，從（4）式出發，最多只可以升冪至五次連環等冪和，之後再不能升了。

至於具有（4）式這樣特別性質的數組，韓氏只找到了這一組，再沒有新的發現，亦不肯定還有沒有。筆者經過一番推導，發現具有如（4）式性質的數組是無窮多的，部份更可用恆等式來表示，如

$$\begin{aligned}&[1,\ k+(2n+1),\ 2k-(2n+2)]_2\\=&[n,\ k,\ 2k-n]_2\\=&[2n+2,\ k-(2n+1),\ 2k-1]_2\end{aligned} \qquad (6)$$

在（6）式中，$k=(n+1)^2$， $n=2，3，4，\cdots\cdots$ 。當 $n=2$，所得的數組正是（4）！須注意的是這樣的恆等式並不止一個。

這些恆等式的發現，只能算是韓湛新的發現的補充罷了。未幾，他經過一番研究觀察，又得到一串新發現。首先，他看到很多等冪和數組都有很好的對稱性，奇次的等冪和數組，其對稱特點是自對稱。例如如下的五次等冪和數組

$$〔0,4,9,17,22,26〕_5 = 〔1,2,12,14,24,25〕_5 \qquad (7)$$

他發現

	0	4	9	1	2	12
＋）	26	22	17	25	24	14
	26	26	26	26	26	26

這就是『自對稱』，凡是對稱的奇次等冪和數組都有這種『自對稱』。

韓湛新不但研究了『自對稱』的和，還觀察到『自對稱』的差也別有玄機。同樣以上述的五次等冪和數組為例，便有

	26	22	17	25	24	14
－）	0	4	9	1	2	12
	26	18	8	24	22	2

可不要忽視這些差數，他們彼此間是有很密切的關係的呢：

$2^2+22^2+24^2=8^2+18^2+26^2$　　　　$2^4+22^4+24^4=8^4+18^4+26^4$

由此可以歸納出一個規律，對於任一對稱（其對稱性體現於『自對稱』之和皆是同一個數）的 $2n+1$ 次等冪和數組，由『自對稱』的差所得的兩組數，其二次方和、4 次方和、…至 $2n$ 次方和皆相等。

對於韓氏這個發現，我是很汗顏的，因為我也有注意過『自對稱』的和與差的現象，卻總看不出它在差數方面的玄機。只是，韓氏受數學知識所限，並不能給自己發現的規律一個證明。筆者則用二項式定理證明了它是事實。

利用奇次等冪和『自對稱』的差數的規律，不但可以構造出一般的奇次等冪和數組，也可以構作出好些奇次的連環等冪和數組。

先來看看三次的最少項（關於等冪和的『最少項』問題，可參見華羅庚《數論導引》第 576~578 頁）連環等冪和數組的構作方法。

筆者想到可用著名的二平方和公式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\mp bd)^2+(bc\pm ad)^2 \qquad (8)$$

有了（8），我們可以造出任意多的互相相等的二平方和數組。例如筆者通過（8）得出八組互等的二平方和

$$\begin{aligned}&9^2+253^2=33^2+251^2=71^2+243^2=89^2+237^2\\&=99^2+233^2=127^2+219^2=159^2+197^2=177^2+181^2\end{aligned}$$

再利用『自對稱』的和與差的規律，就得出八組三次最少項連環等冪和數組來

$$\begin{aligned}&[(253-253),(253+253),(253-9),(253+9)]_3\\&=[(253-33),(253+33),(253-251),(253+251)]_3\\&=[(253-71),(253+71),(253-243),(253+243)]_3\\&=[(253-89),(253+89),(253-237),(253+237)]_3\\&=[(253-99),(253+99),(253-233),(253+233)]_3\\&=[(253-127),(253+127),(253-219),(253+219)]_3\\&=[(253-159),(253+159),(253-197),(253+197)]_3\\&=[(253-177),(253+177),(253-181),(253+181)]_3\end{aligned}$$

將它整理並約去公約數後，得

$$\begin{aligned}&[0,\ 122,\ 131,\ 253]_3=[1,\ 110,\ 143,\ 252]_3\\&=[5,\ 91,\ 162,\ 248]_3=[8,\ 82,\ 171,\ 245]_3\\&=[10,\ 77,\ 176,\ 243]_3=[17,\ 63,\ 190,\ 236]_3\\&=[28,\ 47,\ 206,\ 225]_3=[36,\ 38,\ 215,\ 217]_3\end{aligned}$$

不難看出，只要我們有 w 組互等的二平方和，就可以用上面的方法炮製出 w 組三次最少項連環等冪和來。

回頭再說，韓湛新還很敏銳的察覺五次等冪和的『自對稱』的差數還有美妙的特點，再以（7）式的那兩個數組爲例，其差數組我們已在上面算出，即是 2，22，24 和 8，18，26，除了上述的關係，還有

$2+22=24$ ， $8+18=26$

事實上這是一個很好的代數證明題目：

如果 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 全部滿足下面三個式子

$$A_1=A_2+A_3 \qquad (9)$$
$$A_4=A_5+A_6 \qquad (10)$$
$$A_1^2+A_2^2+A_3^2=A_4^2+A_5^2+A_6^2 \qquad (11)$$

則這六個數必然能同時滿足下式

$$A_1^4+A_2^4+A_3^4=A_4^4+A_5^4+A_6^4 \qquad (12)$$

這個題目，留待讀者來證明好了。而筆者則想到，利用韓氏發現的這些美妙關係，應可構作出五次連環等冪和來，問題是，有沒有方法先炮製出多組互等的二平方和兼四次方和。經過研究，筆者發覺可以作如此代換

設 $A_2>A_3$ ， $A_5>A_6$

令 $X_1=A_2+A_3$ ， $Y_1=A_2-A_3$
$X_2=A_5+A_6$ ， $Y_2=A_5-A_6$

以之代入（11）式，不難得出

$$3X_1^2+Y_1^2=3X_2^2+Y_2^2 \qquad (13)$$

模仿（8）式，我們有以下的公式

$$(P^2+3Q^2)(R^2+3S^2)=(PR\mp 3QS)^2+3(QR\pm PS)^2 \qquad (14)$$

這樣，我們便可以逐步炮製任意多組互等的二平方和兼四次方和。以下是筆者通過公式（14）以及（13）式炮製出的一串實例：

$$1^a+165^a+166^a=21^a+154^a+175^a=51^a+134^a+185^a$$
$$=55^a+131^a+186^a=70^a+119^a+189^a=90^a+101^a+191^a$$

式中 $a=2$，4。

運用這六組數以及上述炮製三次八組最少項連環等冪和的同樣方法，我們就可以構作出五次六組最少項連環等冪和數組來：

$[0,90,101,281,292,382]_5 = [2,72,121,261,310,380]_5$
$= [5,60,136,246,322,377]_5 = [6,57,140,342,325,376]_5$
$= [16,37,170,212,345,366]_5 = [25,26,190,192,356,357]_5$

當然，只要我們能從（14）和（13）式中造出任意多的w組互等的二平方和兼四次方和，我們就可以相應造出五次w組最少項等冪和數組來。

然而，韓氏的發現還陸續有來。不久，他便發覺，所有的對稱的五次最少項等冪和數組，都可以分離出二次最少項等冪和數組來（可是他自已沒辦法給出證明）。例如上述的（7）式，便可以分離出二次四組最少項連環等冪和數組來：

$[0,17,22]_2 = [4,9,26]_2 = [1,14,24]_2 = [2,12,25]_2$

我們剛剛得出的五次六組最少項連環等冪和數組，自然也可以分離出二次十二組最少項連環等冪和來，但組數太多了，只好請讀者自行嘗試。

韓氏更發覺，其實（4）式也是由對稱的五次最少項等冪和數組分離出來的，這個五次等冪和數組就是：

$[1,4,6,12,14,17]_5 = [2,2,9,9,16,16]_5$

這也許解釋了爲何從（4）式出發，只可以造出三次至五次的連環等冪和數組來，六次及以上的卻不能。在韓氏的啓發下，筆者亦發現，七次等冪和數組也可以分離出三次等冪和數組來，以下是筆者找到的實例：

原來的七次等冪和數組：

$[0,4,9,23,27,41,46,50]_7 = [1,2,11,20,30,39,48,49]_7$

它分離出的三次四組連環等冪和數組是

$[0,14,15,23,27,35,36,50]_3 = [1,13,14,22,28,36,37,49]_3$
$= [2,11,15,20,30,35,39,48]_3 = [4,9,13,22,28,37,41,46]_3$

這四組數，第一行和第四行合併，即爲原七次等冪和左邊的數組；第二行和第三行合併，即爲原七次等冪和右邊的數組。說起來，這裏所舉的實例是來自一個七次等冪和恆等式的，可見於《數學教育》第六期中筆者發表的一篇文章的結束處。事實上，從該恆等式得出的七次等冪和數組俱可分離出三次四組連環等冪和數組來，只是筆者在發現該恆等式之初，並未爲意有此特別性質，至於證明，由於頗佔一點篇幅，惟有從略。

在等冪和這個領域上，委實有太多神秘而誘人的奇觀待人發掘！

研究進行至這裏，韓湛新和筆者曾嘗試探索構作四次及以上的偶次冪最少項連環等冪和數組的具體方法。但發覺這遠比構作奇次冪和數組艱難得多。

首先，對稱性的偶次等冪和數組，其對稱的方式是數組間的對稱。舉個具體例子，像如下的四次等冪和數組

$$[0,4,8,16,17]_4 = [1,2,10,14,18]_4$$

其對稱性體現爲

$$\begin{array}{rrrrrr} & 18 & 14 & 10 & 2 & 1 \\ +) & 0 & 4 & 8 & 16 & 17 \\ \hline & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{array}$$

它們的差數亦很有特點：

$$\begin{array}{rrrrrr} & 18 & 14 & 10 & 2 & 1 \\ -) & 0 & 4 & 8 & 16 & 17 \\ \hline & 18 & 10 & 2 & -14 & -16 \end{array}$$

這五個差數有這樣的關係

$$18^g + 10^g + 2^g + (-14)^g + (-16)^g = 0$$

這裏 $g=1$，3。

一般說，2n 次冪的等冪和數組，其對稱數組的各個差數的一次方和、三次方和……至 $2n-1$ 次方和皆爲 0。這可以用二項式定理證明之。這也就是構作偶次冪最少項連環等冪和的艱難處，好比說，要構作四次四組最

少項連環等冪和，我們先得找出十個數

M_1,M_2,M_3,M_4,M_5 和 N_1,N_2,N_3,N_4,N_5

它們須同時滿足下列三個式子

$$M_1^u+M_2^u = M_3^u+M_4^u+M_5^u$$
$$N_1^u+N_2^u = N_3^u+N_4^u+N_5^u$$
$$M_1^{u+1}+M_2^{u+1}+M_3^{u+1}+M_4^{u+1}+M_5^{u+1}$$
$$=N_1^{u+1}+N_2^{u+1}+N_3^{u+1}+N_4^{u+1}+N_5^{u+1}$$

在這三個式子中，$u=1$，3。

條件是如此苛刻，以至我和韓氏二人都只能望而卻步。這裏謹向各方高明請教，到底是否存在四次或以上的偶次多組最少項連環等冪和數組？

末了，還想談談韓湛新在不對稱的等冪和方面的有趣發現。這方面是筆者過去完全忽略的。我們首先舉出一些不對稱等冪和數組的實例；

$$〔0,11,13,22〕_3 = 〔1,7,18,20〕_3 \qquad (15)$$
$$〔0,24,39,75,78〕_4 = 〔3,15,54,60,84〕_4 \qquad (16)$$

這些不對稱數組雖說不對稱，但它其實還有它的對稱性，那是要跟另一組不對稱等冪和數組配合，其對稱性才能體現出來。像（15）式，與之相配合的數組是

$$〔0,9,11,22〕_3 = 〔2,4,15,21〕_3$$

這兩對等冪和數組的對稱性體現如下

	0	11	13	22	1	7	18	20
+）	22	11	9	0	21	15	4	2
	22	22	22	22	22	22	22	22

與（16）式相配合的數組是

$$〔0,24,30,69,81〕_4 = 〔6,9,45,60,84〕_4$$

而這兩對等冪和數組的對稱性體現如下

	0	24	39	75	78	3	15	54	60	84
＋)	84	60	45	9	6	81	69	30	24	0
	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84

在不對稱中亦隱藏某種對稱性，造物者的設計真奇妙。像這樣相配合的等冪和數組，也許可稱之為『相伴』、『配偶』、『伴侶』等等，而筆者喜歡稱之為『共軛』，儘管這樣的叫法可能有待商榷。

除了不對稱等冪和數組的『共軛』性，韓氏還發現，一對『共軛』等冪和數組併合後，可以升一次冪變成對稱的等冪和數組。不過，偶次的『共軛』數組須同側合併；奇次的『共軛』數組須異側合併。且以（15）、（16）式為例，（15）式是奇次冪和，故與其『共軛』數組合併須異側合併，即

0，11，13，22 與 2，4，15，21 併合為一；
1，7，18，20 與 0，9，11，22 併合為一。

整理（消去相同的數）後，得一對稱的四次等冪和數組

$$〔1,7,9,18,20〕_4 =〔2,4,13,15,21〕_4$$

（16）式是偶次冪和，故與其『共軛』數組合併須同側合併，即

0，24，39，75，78 與 6，9，45，60，84 併合為一；
3，15，54，60，84 與 0，24，30，69，81 併合為一。

整理（消去相同的數）後，得一對稱的五次等冪和數組

$$〔3,15,30,54,69,81〕_5 =〔6,9,39,45,75,78〕_5$$

這種合併後可升冪的現像，原來是必然的，至於證明，仍然要動用到二項式定理。可見等冪和中很多現像，都跟二項式定理有密切的關係。

關於韓湛新在等冪和研究中的發現，就介紹到此為止，相信大家都有些『洋洋大觀』之感。當然，某些所謂『發現』，應是前人早有述及的（可是卻不容易在一般的數論書籍或談等冪和的文章中看到），韓氏現在不過是重新獨立發現而已，而韓氏的遺憾則在於所發現的東西都沒能夠親自給出證明。然而作為一個只有中一程度的數學愛好者能有如此的發現，還是教筆者驚嘆的，其鑽勁和洞察力都教我佩服，筆者曾以『小米加步槍』來讚美

他。再者，發現問題或規律的人，跟給出問題或規律以證明的人，是同等重要的啊！韓氏自己給不出證明，也不該抱憾。

韓氏以興趣作動力，而得此豐富的成果。如果我們培養更多學生對數學感興趣，對不同的數學領域或問題入迷，那就意味日後的數學園地會有更多好手參與開墾，因而結出無比豐盈的纍纍果實。