π 的兩個表示式

梁子傑

香港道教聯合會青松中學

考慮函數 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 和定積分的定義，不難得出對於一個半徑等於 r 的圓形，它的面積等於 $4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$。

利用代換 $x=ru$，得 圓面積 $=(4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x)\,r^2$。但眾所周知，圓面積 $=\pi r^2$。比較兩個結果，我們得到圓周率 π 的數值為 $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$。

另一方面，由計算弧長的算式 $\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 可以得到圓周應等於 $4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

再一次利用代換 $x=ru$，得 圓周 $=2(2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x)r$。又因為圓周 $=2\pi r$，所以亦可將 π 的數值表示為 $2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

在這裡，我們利用了兩個不同的定積分公式來表示圓周率 π。我們能怎樣直接證明這兩表示式相等？

留意

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

設 $u=x$，$\mathrm{d}v=\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$，則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=-\sqrt{1-x^2}$ 。

使用部分積分法，得

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left[-x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ 。}$$

綜合得，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 。