人貴自知（以人度己?）

蕭文強

香港大學數學系

「爲什麼看見你弟兄眼中有刺，
卻不想自己眼中有樑木呢?」
馬太福音 7:3 (路加福音 6:41)

1. 相信不少讀者曾經碰過以下的趣題:

> 甲、乙、丙三人在樹下打盹，有頑童路過，把三人的面孔都塗污了。三人一覺醒來，各自見到另外兩人的滑稽相，不禁相視大笑。隨即甲停止不再笑了，因爲他醒悟到自己的面孔也給塗污。他怎麼曉得呢?

甲是這樣推論:「如果我的面孔沒給塗污，那麼乙看見丙哈哈大笑，便知道丙正在笑他(指乙)，於是乙應該知道自己的面孔給塗污，也就應該停止不笑。既然他還在笑，一定是他看見我的面孔也給塗污了。」

如果問題中的三人改成四人(或以上)，這種推論便失效。即使甲的面孔沒給塗污，乙看見丙和丁的面孔給塗污， 他可不知道丙哈哈大笑是在笑他(指乙)、抑或笑他和丁、抑或只是笑丁呢? 有一個可能乙的面孔是沒給塗污的。如此說來，這個趣題是否只限於三人(或二人)的情況呢?

等一等， 讓我們慢慢仔細分析一下這個問題。其實， 這個問題有很多變奏的。從不同的角度審視這些變奏，不只幫助我們釐清這類問題的要點，

也培養我們面對問題的多元思考。本文綜合一些有關資料， 作出初步嘗試，希望讀者提供更多意見。

2. 爲了提高懸疑成份以增添趣味，讓我先舉兩個變奏(以下討論當中會出現更多變奏)。讀者不妨先想一想這兩個變奏，才繼續看下去。

[變奏 1]華羅庚爲中學生寫了一本小書<<數學歸納法>>(1963)，在第五節講述了一段故事:

> 有一位老師想辨別出三個學生中那一個更聰明，準備了三頂白帽子和兩頂黑帽子，先讓三位學生看了一看，然後要他們閉上眼睛，替每一位學生戴上一頂白帽子，並且收藏起兩頂黑帽子。最後老師讓他們張開眼睛(只看見別人的帽子，不能看見自己的帽子)，請他們說出自己頭上戴的帽子是什麼顏色。

結果三個學生互相看了一看，躊躇了一會，卻同時說出自己戴上白帽子， 他們怎麼知道呢?華羅庚接著提出更一般的情況: 有 n 個學生，若干(不少於 n)頂白帽子和 n-1 頂黑帽子，老師給每個學生戴上一頂白帽子，他們怎麼知道呢? 電腦學教授張系國寫了一本科幻小說 <<五玉碟>> (1983)，也運用了這段故事，白帽子換成藍玉碟，黑帽子換成綠玉碟。不過，他還在故事中滲進了人性弱點的考慮，使情節變得更曲折，有興趣的讀者請找這本小說讀一讀。本文只按照邏輯推理行事，人性弱點暫擱一旁！

[變奏 2] David Gale 爲雜誌 MATHEMATICAL INTELLIGENCER 撰寫一個數學娛樂專欄，有一次提了以下的問題 (Vol. 6. no.4, 1994):

> 你和你的朋友各自拿到一個正整數，你們只知道這兩個數是相鄰的，但不得互通消息。爲什麼拿到較小那個數的一方肯定知道而宣佈出來?

其實，Gale 的敘述比上面說的來得詳盡(以下我們要回去討論)，暫時我故意寫成這個版本，是爲了突出這個趣題的悖論味道。既然你和你的朋友不能互通消息，你拿到 19 可不知道對方拿到 18 抑或 20。同樣地，他拿到 20 也不能肯定你拿到 19 抑或 21。猜測的話，有五成機會猜中，但怎麼能肯定知道誰拿到的數較小呢? 如果能夠知道，豈不成了未卜先知的異人!

3. 受了[變奏 1]的啓發，我爲 1983 年度新界區中學校際數學比賽(由香港教育專業人員協會數學組主辦)擬了這樣的一道題目(大意如下):

> 甲、乙、丙三人坐在一行，甲可以看到乙和丙，乙只看見丙，丙見不到另外兩人。從兩頂黑帽子和三頂白帽子中選三頂，給每人戴上一頂。當問及是否知道自己戴上什麼顏色的帽子時，甲說不知道，乙也說不知道，丙可否知道自己戴上什麼顏色的帽子呢?

這個變奏可以說是最容易解答的一個，即使把三人換作 n 人，A_1、…、A_n，有若干(不少於 n)頂白帽子和 n-1 頂黑帽子，老師給每個學生戴上一頂白帽子， 推論還是一般無異。 既然 A_1 說不知道，則 A_2 至 A_n 不可能人人

戴上黑帽子(否則 A_1 便知道自己戴上白帽子)。既然 A_2 也說不知道，則 A_3 至 A_n 不可能人人戴上黑帽子(否則 A_2 便知道自己戴上白帽子)。餘類推，直至 A_{n-1} 也說不知道，則 A_n 便知道自己肯定戴上白帽子了。這兒運用的證明技巧叫做反證法，有別於等會兒在下一節運用的數學歸納法。但推理過程中已經蘊涵一項要素，是以下所有變奏的推理基礎，即是把自己置身於別人的處境去考慮問題。(如果我是 A_1，看見 A_2 至 A_n 都戴上黑帽子，我會得到什麼結論?)據說心理學家曾做過實驗，發現即使在人類當中，也要達至某個階段才具備這種**考慮別人如何考慮問題**的思考能力，年紀小的幼兒尚未具備這種思考能力的。在以下的討論當中，我們常常要運用這種思考能力。

4. 讓我們回到[變奏 1]，運用數學歸納法解決這個問題，(當中一步也用了反證法)。首先，我們要設計欲證明的命題 P(n)。容許我提議一個聽來有點彆扭的 P(n):

> 從若干(不少於 n) 頂白帽子和 n-1 頂黑帽子中選 n 頂給 n 個人戴上。如果甲看見其他 n-1 個人戴上白帽子，但沒有一個人馬上宣佈自己戴上白帽子，則甲知道自己戴上白帽子。

過一會兒我們便把問題稍作修飾，從而也把 P(n)改成一個較自然的命題，請讀者忍耐一下吧。

P(1)是對的，因爲那是只有白帽子沒有黑帽子的情況。P(2)也是對的，那時有兩個人卻只有一頂黑帽子，甲看見對方戴上白帽子，他想:「如果我

戴上黑帽子，對方便馬上知道自己是戴上白帽子，他會馬上宣佈出來。但他沒有這樣做，所以我是戴上白帽子。」假定 P(k)是對的，欲證明 P(k+1)也是對的。即是有 k+1 個人和若干(不少於 k+1) 頂白帽子和 k 頂黑帽子，甲看見其他 k 個人戴上白帽子，但沒有一個人馬上說出來，他想:「如果我戴上黑帽子，乙便會看見 k-1 人戴上白帽子，沒有一個人馬上說出來。不把我戴上的黑帽子算在內，有若干(不少於 k)頂白帽子和 k-1 頂黑帽子，選取 k 頂帽子給 k 個人戴上(不把我算在內)。按照 P(k) ，乙知道他是戴上白帽子，他應該馬上說出來，但他沒有這樣做，所以我是戴上白帽子。」這證明了 P(k+1)也是對的。

回頭再看本文開場介紹的趣題，我打算採用一個稍經修飾的版本，劉炯朗教授把它收入他著作的課本中 (C.L. Liu., “Elements of Discrete Mathematics”, 2nd edition, 1985, p.16):

> 有一位國王召集全國的數學家來到宮廷，每人給戴上一頂帽子。國王說:「有些人戴上白帽子，其他人戴上黑帽子。你們不可以摘下自己的帽子看看是什麼顏色，也不可以互相交談。每隔一小時我回來一趟，如果我回來時你知道自己戴上的帽子是什麼顏色的話，請你告訴我。」

結果，戴上白帽子的 n 個數學家都在第 n 個小時宣佈他們戴上白帽子。讓我們設計欲證明的命題 P(n):

> 如果有 n 個人戴上白帽子，他們都在第 n 個小時宣佈他們
> 戴上白帽子。

P(1)是對的，因為國王保證至少有人戴上白帽子，那位唯一戴上白帽子的人看見其他人都戴上黑帽子，他在第一個小時便宣佈出來。假定 P(k)是對的，欲證明 P(k+1)也是對的。設甲是 k+1 個戴上白帽子的人當中一個，他在第 k+1 個小時想:「 我看見 k 個人戴上白帽子，如果我是戴上黑帽子，便只有 k 個人戴上白帽子， 按照 P(k) ，這 k 個人應該在前一個小時(即是第 k 個小時)宣佈出來。但他們沒有這樣做，所以我是戴上白帽子。」這證明了 P(k+1)也是對的。

好了，我們可以回到[變奏 2]。仿效剛才的例子，我們多添一些話，假定每隔一秒打一次鐘，拿到較小的數一方待肯定知道這回事便在打鐘時宣佈出來。 P(n)變成:

> 如果兩人各自拿到 n 和 n+1，拿到 n 的人在第 n 秒打鐘時
> 宣佈自己拿到較小的數。

P(1) 是對的，因為 1 是最小的正整數。假定 P(k)是對的，欲證明 P(k+1)也是對的。 拿到 k+1 的人在第 k+1 秒想:「如果對方拿到 k，按照 P(k) 他應該在前一秒(即是第 k 秒)打鐘時宣佈出來。但他沒有這樣做，所以他拿到的是 k+2，我拿到的數是較小。」這證明了 P(k+1)也是對的。

一個有趣的問題是: 隔一秒打一次鐘有什麼作用呢? 譬如說你拿到的數是 19，你可以肯定第一秒打鐘時誰人都不會作聲。既然明知大家都保持緘默，打鐘豈非多此一舉? 同樣地，明知第二秒打鐘時誰人都不會作聲，情況跟兩秒前有什麼分別呢?不是的，正所謂「沉默是金」，此時無聲勝有聲，不說話並不等於沒有傳達訊息!這樣表述問題突出了這類問題的一項要素，就是當事人必須**共享**某些訊息，而且**互相知道**大家在共享某些訊息。譬如說我拿到 2，我可不知道你是拿到 1 抑或拿到 3，你不作聲便提供了額外的訊息(你不是拿到 1)。又譬如我拿到 3 你拿到 4，我和你都知道第一秒打鐘時沒有人會作聲，但我不肯定你也知道這回事，因爲就我所知你可能拿到 4 或 2，如果你拿到 2，你便不肯定我會否在第一秒打鐘時宣佈出來(如果我真的拿到 1)。 雙方在第一秒打鐘時不作聲，讓大家共享這個訊息。

5. 作爲本文的結束，讓我多介紹一個變奏。我認爲這是眾多變奏中最有趣也是最微妙的一個，見諸 Michael Spivak 的課本中的習作(M. Spivak, “Calculus”, 2nd edition, 1980, p.35):

> 某大學數學系有 17 位教授，每星期召開系會，全部人列席。系方有一條不明文規定，如果有人發現自己發表的論文有任何錯誤，便得在系會上說出來，並且引咎辭職。多年以來，從來沒有人因而辭職。但那並不是說人人的論文都沒有錯誤，反之每一位教授的論文都有錯誤，給另一位同事發現了，只是發現錯誤的人只把錯誤告訴其他全部同事，卻向犯錯誤的人瞞著不說(是不好意思說呢?還是避免

> 有人因而辭職呢?)有一年來了一位客座 RAP(研究助理教授) X 君，合約期滿後因爲被系方指出他的論文有錯誤而不給續約，心中不忿。年終在最後一次系會上這位 X 君向大家說:「謝謝一年來大家對我的照顧，但我必須告訴大家一件事，你們當中至少有一位的論文是有錯誤的，給別的同事發現出來。」

結果怎樣呢? 讀者看了前面四節便知道，翌年在第 17 次系會上全部 17 位教授都引咎辭職了。(若非如此，他們便沒有好好理解數學歸納法，恐怕也應引咎辭職吧!)

微妙的一點是: X 君指出的事實，其他每位教授早便知道的，他說了出來跟沒有說出來，有何分別呢? 但如果他沒有說出來，大家便一如以往相安無事，各人看到別人眼中的刺，卻不知道自己眼中的樑木! 要是讀者逐步追蹤一下 $n=2$ 或 3 的整個推理過程，便會看出端倪，關鍵在於 $P(1)$是否對呢?(再給一個提示，回頭看看國王考核數學家的故事，爲什麼戴黑帽子的人不能跟隨戴白帽子的人那樣推理呢?在故事中白帽子和黑帽子的地位是否相當呢?)