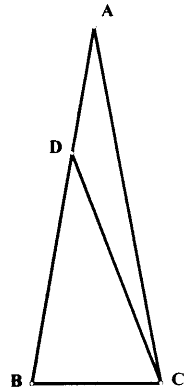
難題一則

梁子傑

香港道教聯合會青松中學

在 ΔABC 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 是 AB 上一點使得 $AD = BC$，求 $\angle BDC$。

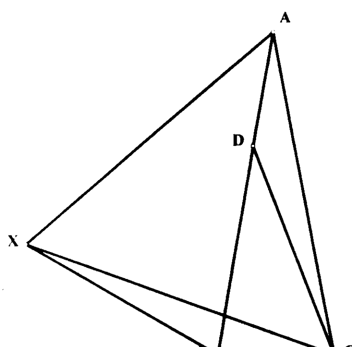


上述問題相當有趣和富挑戰性，我建議大家先試解此題，然後才繼續閱讀以下的解答。

[解法一]

在 B 點的同一側加入一點 X，使 ΔXAC 成爲一個等邊三角形。易證 $\angle XCB = 20°$，即 $\angle CAD = \angle XCB$。已知 $AD = CB$，並且 $AC = CX$，所以 $\Delta ADC \cong \Delta CBX$（S.A.S.）。由此得 $\angle ACD = \angle CXB$。

另一方面，$AX = AB = AC$，即 X、B、C 三點位於一個以 AC 爲半徑，A 點爲圓心的圓之上，而 $\angle CXB$ 則爲該圓上一圓周角。因爲圓心角 $\angle A = 20°$，所以 $\angle ACD$



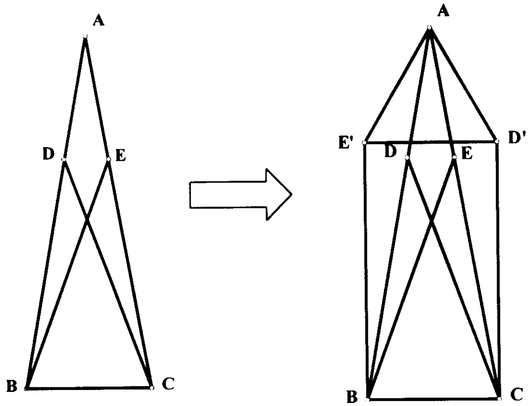
$= \angle CXB = 20° \div 2 = 10°$。

最後由 ΔADC 的外角關係可得 $\angle BDC = 20° + 10° = \underline{30°}$。

[解法二]

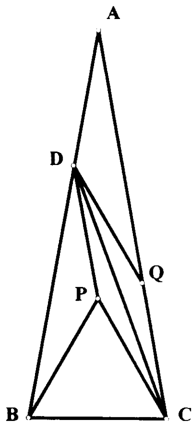
在直線 AC 線上加一點 E，使得 $AE = AD\ (= BC)$。

以 AC 爲鏡軸，將 D 點反射至 D'。又以 AB 爲鏡軸，將 E 點反射至 E'。



易知 $AE' = AD'$，$\angle E'AD' = 60°$，所以 $\Delta AE'D'$ 爲等邊三角形。故此，$E'D' = BC$。另外，$\Delta AD'C \cong \Delta ADC \cong \Delta AEB \cong \Delta AE'B$（S.A.S.）。故此，$E'B = D'C$，即 $E'D'CB$ 爲一平行四邊形。同時，$\angle ACD' = \angle ACD = \angle ABE = \angle ABE'$。因爲 $BE' \parallel CD'$，所以 $(\angle ACD' + 80°) + (80° + \angle ABE') = 180° \Rightarrow \angle ACD = 10°$。最後由 ΔADC 的外角關係可得 $\angle BDC = 20° + 10° = \underline{30°}$。

[解法三]



在 ΔABC 內定一點 P 使得 ΔPBC 爲一等邊三角形。又在 AC 上定一點 Q 使得 $QC = BC$。由此得 $AD = BC = PB = PC = QC$。亦得 $AQ = BD$。連結 DP、DC 和 DQ。易證 $\angle PBD = 20° = \angle A$。由此可知 $\Delta DAQ \cong \Delta PBD$（S.A.S.），並且 $DQ = DP$。再由此推得 $\Delta QDC \cong \Delta PDC$（S.S.S.），即 $\angle QCD = \angle PCD$。但因爲 $\angle PCQ = 20°$，所以 $\angle QCD = 20° \div 2 = 10°$。最後由 ΔADC 的外角關係可得 $\angle BDC = 20° + 10° = \underline{30°}$。

以上的三個方法都有一個共通的特點，就是在三角形上增加一個等邊三角形。現時教科書之中，很少提及這種方法。但，這方法並非罕見，好像下面兩題，都可以以適當地加入一個等邊三角形的方法來解決。

1. 在 ΔABC 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，M 和 N 分別是 AB 和 AC 上的點，使得 $\angle MCB = 60°$，$\angle NBC = 50°$。求 $\angle NMC$。

2. 在四邊形 $BCYX$ 中，$\angle XBY = 12°$，$\angle YBC = 36°$，$\angle XCB = 48°$，$\angle XCY = 24°$。求 $\angle XYB$。

無獨有偶，以上兩題的答案都是 30°！到底這是巧合，還是這類問題的答案必定等於 30° 呢？

這問題的答案我不清楚，但我發現一個頂角等於 20° 的等腰三角形，卻有相當美妙的特性。例如在「解法三」的圖中，設 $\angle QDC = x$，則 $\angle PDC = x$，$\angle AQD = \angle BDP = 30° - x$。

但從 ΔDQC 的外角關係可知 $30° - x = x + 10$，即 $x = 10°$。由此，我們更證明了 ΔDQC 和 ΔDPC 亦是等腰三角形，而且 AD、DQ、DP、QC、PC、PB 和 BC 的長度都相等。

仔細看看，ΔCPQ 和 ΔDQP 又是兩個頂角等於 20° 的等腰三角形！

還有，上面三個解法中，最重要的一步，明顯就是證出 $\angle ACD = 10°$。假如我們將此結果看成頂角等於 20° 的等腰三角形內的一個定理，我們更可以利用它來解以下的問題：

在 ΔABC 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 80°$。若果 P 為三角形內一點，令 $\angle PBC = 10°$，$\angle PCB = 30°$，那麼求 $\angle PAC$。（答：70°）

參考書目

《中學數學特長生讀本習題集 初中二年級》經濟日報出版社

鳴謝：文中「解法一」和「解法二」分別由蕭文強教授和郭家強老師提供，作者特此致謝。