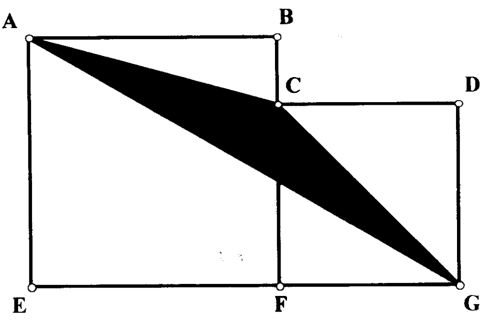
小學趣味數學二題

黃志華

第一篇：自動離場!

「不大可能吧！」全班同學裏，大半都在臉上流露出這種想法。

這一節課，由於原來的數學老師告了病假，代課的張老師不想打亂別人的教學計劃，又不想讓學生自修便算，遂給這班小六學生出了一道題目：



如圖，ABFE 和 CDGF 是兩個緊靠在一起的正方形，已知 CDGF 邊長為 8 cm，求圖中陰影部份，即ΔACG 的面積。

看了題目，同學們都感到，只給出小正方形的邊長，怎足以算出 ΔACG 的面積呢？不大可能吧！

張老師卻道：「無論如何你們也該先試試去算一算嘛。」

同學們只好著思索，可是大部人依然入手無從，很是爲難。

過了「漫長」的幾分鐘，張老師提議：「不如你們大膽猜猜看，做數學難題，有時是需要這樣做的。譬如說，若 AG 和 CF 相交的那一點是 H，那麼 ΔACH 的面積跟 ΔCHG 或 ΔHGF 的面積會是甚麼關係？萬一是相等的關係，這道題目要算起來就不難了。」

得了提示，大家的勁兒來了，開始埋頭苦幹。平日數學成績不差的小馮一馬當先舉手，道：「張老師，我發現△ACH 和△HGF 的面積是相等的！」

小馮接著解釋：「設 CDGF 的邊長是 c，ABFE 的邊長是 a，則 ΔAEG 的面積是 $\frac{1}{2}\times c\times(c+a)$，梯形 ACFE 的兩個底分別是 c 和 a，所以其面積是 $\frac{1}{2}\times(c+a)\times c$，即 $S_{\Delta AEG}=S_{梯形ACFE}$ 兩邊俱減去梯形 AHFE 的面積後，即得 $S_{\Delta HGF}=S_{\Delta ACH}$」(這裏 S_{Ω} 代表區域 Ω 的面積。)

「嗯，馮同學說得很好。大家都明白了嗎？那麼 ΔACG 的面積是多少啦？」

「$32cm^2$！」全班同學幾乎異口同聲的答。

張老師接著說：「日後當你們的數學知識更豐富時，會發現解這道題目的關鍵關係，可以用較簡單的方法導出。」

「我試舉一例，以你們的程度，該不會感到難懂。」

設 HF 的長度爲 b，按相似三角形的性質，有以下的比例關係

$$a : b = a + c : c$$

於是 $ac = ab + bc$ 得 $ab = c(a - b)$。

兩邊同時乘以 $\frac{1}{2}$，便有 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c(a - b)$。

這裏左邊正是 $S_{\Delta HGF}$，右邊正是 $S_{\Delta ACH}$。

「我倒想知道出這條題目的人是如何發現有 $S_{\Delta HGF} = S_{\Delta ACH}$ 這個關係的。」一同學問道。

「你問得很好，但我也實在不知道。」張老師答道。

「這位同學也許對我的答案有點失望。然而可以告訴各位同學，有時巧妙的數學方法或定理，是源自一步一個腳印的笨辦法的。我國已故的大數學家華羅庚也曾說：『先不要以爲方法笨，有了方法之後，方法是死的，人是活的。運用之妙，存乎其人。』也讓我用一個笨辦法來解解剛才那道題目，大家試試比較比較這些方法的優劣。」

無疑，我們有 $S_{\Delta ACG} = (S_{ABEF} + S_{CDGF}) - (S_{\Delta ABC} + S_{\Delta CDG} + S_{\Delta AEG})$

「這個式子好繁好笨罷！但請耐心點看下去。」

由於 $S_{ABEF} = c^2, S_{CDGF} = a^2,$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}c(c - a)\ , S_{\Delta CDG} = \frac{1}{2}a^2\ , S_{\Delta AEG} = \frac{1}{2}c(c + a)\ ,$$

所以　$$S_{\Delta ACG} = (c^2 + a^2) - \frac{1}{2}[c(c-a) + a^2 + c(c+a)]$$

$$= (c^2 + a^2) - \frac{1}{2}[2c^2 + a^2] = \frac{1}{2}a^2$$

「啊！」同學們都很驚訝。

「看！辦法雖笨，但當中卻也有奇妙之處 —— 預了要用上 ABEF 的邊長來計算 ΔACG 的面積，最後卻發覺它自動離場去了。此外，這個笨辦法反而不要求我們預先知道 $S_{\Delta HGF} = S_{\Delta ACH}$ 這個關係，但由 $S_{\Delta ACG} = \frac{1}{2}a^2$，我們只要肯加思索，也可以得出有 $S_{\Delta HGF} = S_{\Delta ACH}$ 的推論。」

「像這樣子的有某些未知數『自動離場』，在數學解題中並不罕見，就看計算的人能否善用。上了中學，你們漸漸會碰到更多『自動離場』的例子的。」

說到這裏，下課鐘響了。

「好了，我也要自動離場吶！」張老師的話，引來同學們的會心微笑。

這一節雖不是正式的數學課，不過同學所得到的肯定不比正規的數學課少。

思考題：圍繞一個圓形廣場的周圍畫一個更大的圓，使圓與廣場圓圍的距離爲 4m。問：大圓周的周長比廣場的圓周長多少米？

第二篇：餘數小魔術

你能否在十秒之內算出下面兩個算式的餘數：

甲：　$1020304050607 \div 99$

乙：　$101101101101101 \div 999$

不要以為這是絕不可能的事，因為第一個算式的餘數相當於 $1 + 02 + 03 + 04 + 05 + 06 + 07 = 7 \times (1 + 7) \div 2 = 28$，第二個算式的餘數相當於 $101 + 101 + 101 + 101 + 101 = 101 \times 5 = 505$。

原來，只要除數是全由 9 組成的數，都可以用同樣的方法快速地求得餘數，例如 $1234567 \div 9999$ 的餘數是 $123 + 4567 = 4690$。又如 $8888888888 \div 99999$ 的餘數是 $88888 + 88888 = 177776$ 可是 177776 比 99999 大，實際餘數是 $1 + 77776 = 77777$

這現象是甚見奇巧的，然而通過以退為進的策略來解說箇中道理，即使是高年級的小學生，也能明白其所以然。

先從 9 說起，很明顯

$10 = 9 + 1$，　　　　即 $10 \div 9$ 餘 1

$2 \times 10 = 2 \times 9 + 2 \times 1$，　　　　即 $20 \div 9$ 餘 2

……….

$8 \times 10 = 8 \times 9 + 8 \times 1$，　　　　即 $80 \div 9$ 餘 8

也就是說，對於任何一個正整數 n，我們都會有 $K \times 10^{n} = K \times 9s + K \times 1$。

即 $K \times 10^n \div 9$ 餘 K，這裡 $0 \le K \le 9$，而 $s = (10^n - 1) \div 9$。

所以不難解釋，任一正整數 N 用 9 來除，其餘數相當於把 N 的各個位數的數字全加起來後用 9 除所得的餘數。

譬如說 $N = a_0 + 10 \times a_1 + 10^2 \times a_2 + \ldots + 10^n \times a_n$，其中 $0 \le a_0, a_1, \ldots, a_n \le 9$，則不難看出 $N \div 9$ 的餘數與 $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \div 9$ 的餘數相同。

推而廣之，若除數是 $(10^n - 1)$，被除數是

$$N_1 = a_0 + 10^n \times a_1 + 10^{2n} \times a_2 + \ldots + 10^{kn} \times a_k$$

其中　$0 \le a_0, a_1, \ldots, a_n \le (10^n - 1)$，則 $N_1 \div (10^n - 1)$ 的餘數與

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \div (10^n - 1)$ 的餘數相同。

上述的快速餘數求法到此可說得到圓滿而清楚的解釋，但可研究的問題卻還多着呢！譬如說，除數不是 $(10^n - 1)$ 而是 $(10^n - 2)$ 甚至是 $(10^n - K)$時又如何？

試以 8 爲例

$10 \div 8$ 餘 2

$100 \div 8$ 餘 4

$1000 \div 8$ 餘 0

所以，要求一個數被 8 除的餘數是多少，只需算該數的末三位數被 8 除的餘數是多少便行。

例：求 $342671 \div 8$ 的餘數。

答：該餘數相當於 $671 \div 8$ 的餘數，又相當於 $(6\times4 + 7\times2 + 1) \div 8$ 的餘數，即相當於 $(24 + 14 + 1) \div 8$ 的餘數，即餘數是 7。

當除數是 98 時，因為

$100 \div 98$ 餘 2

$10000 \div 98$ 餘 4

$1000000 \div 98$ 餘 8

$100000000 \div 98$ 餘 16

……

所以，要是求 $25623117 \div 98$ 的餘數，就是相當於求（$25 \times 8 + 62 \times 4 + 31 \times 2 + 17$）$\div 98$ 的餘數，相當於求（$200 + 248 + 62 + 17$）$\div 98$ 的餘數，相當於求 $527 \div 98$ 的餘數，即 37。

當然，這裡的算法可能比直接求餘數還繁瑣些，但至少應知道有這樣的一種方法，在某些時候起着速算之效。

比方說，求 $2024 \div 97$ 的餘數，用類似的方法，很快便求得餘數是 $20 \times 3 + 24 = 84$。

稍為轉換一下角度，我們還有以下的一種富於趣味的餘數問題：

$23456592 \div 1233$
$22345659 \div 1233$
$92234565 \div 1233$

59223456 ÷ 1233
65922345 ÷ 1233
56592234 ÷ 1233
45659223 ÷ 1233
34565922 ÷ 1233

我們會發覺每個式子都是除得盡的，沒有餘數的！像這樣的除數和被除數，是如何找尋出來的呢？這裡且賣個關子，讓有興趣的老師和同學自行探討、研究。