單位分數的奧秘

馮振業 香港教育學院

筆者在上期〈來自古埃及的教學靈感〉一文中，提及單位分數，即分子爲 1，分母爲正整數的分數。在古埃及人的數學裏，基本上只談單位分數的和，因他們能成功地把常用的分數都化成相異單位分數的和。用現代的觀點看，以下命題是正確的：

命題一

任何 0 與 1 之間的有理分數皆可表成相異單位分數之和。

英國數學家西爾維斯特（J.J. Sylvester, 1814 - 1897）提供了以下的系統構作法：

- **i.** 求不大於給定分數的最大的單位分數
- **ii.** 從給定分數中減去此單分位分數
- **iii.** 求不大於所得差的最大單位分數
- **iv.** 繼續減，並且繼續此程序

這個方法實在十分自然，說穿了，就是在

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \cdots \quad \frac{1}{n} \quad \cdots$$

中，逐步拿最大的剩下來的單位分數去併和，直至與給定分數相等，不是很直接自然嗎？或許小學生也能想出呢？

例如：

$\frac{6}{7}-\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$ （因 $\frac{1}{2}$ 是最大的不超過 $\frac{6}{7}$ 的單位分數）

$\frac{5}{14}-\frac{1}{3}=\frac{1}{42}$ （因 $\frac{1}{3}$ 是最大的不超過 $\frac{5}{14}$ 的單位分數）

因此，$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$ 。

然而，難點卻在於解釋爲甚麼這個程序必在有限步內停止。（否則便變成停不了的程序！）

假設在某步之中我們把剩下來的差 $\frac{a}{b}$ 減去最大不超過 $\frac{a}{b}$ 的單位

分數 $\frac{1}{\alpha}$ ，這裡　a, b, α 皆爲正整數。

由 $\frac{1}{\alpha-1} > \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\alpha}$ 　　　　　（α 必大於 1）

知 $a > a\alpha - b \geq 0$ 。

因此，$\frac{a}{b} - \frac{1}{\alpha} = \frac{a\alpha - b}{b\alpha}$ 中的分子 $a\alpha - b$ 在未約簡時已較原分子 a 小。換言之，每減一次，剩下的分數於約至最簡時的分子皆較原先的小，有限步內，必至分子爲 1，即所得差爲單位分數，也就是停下來的一刻！

命題二

任何單位分數皆可表成兩相異單位分數之和。

當學生注意到

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$
$$\vdots$$

即任何兩相鄰單位分數相減必爲單位分數後，一般的證明便呼之欲出。且看

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

故對任何正整數 n， $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 便爲所求。

有了命題二，即知表成單位分數和的式子不只是不唯一，更是無窮地多！只要在任何一條這樣的式子中，把分母最大的一項按上述的方法換成兩項分母更大的單位分數的和，便可得出一個不同的表示

法。不斷重複，就生出一個又一個的新式子，那會有窮盡。由此得。

<u>命題三</u>

對任何 0 與 1 之間的有理分數，皆有無窮多的相異單位分數和的表示式。

這裡無窮多的表示式源於不斷增加項數，如果我們把項數限於二之內，事情會否同樣易辦？答案是否定的，且看 $\frac{6}{7}$。由於對任何正整數 $m \geq 2$、$n \geq 3$，$1+\frac{1}{m} > \frac{6}{7} > \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ ，故 $\frac{6}{7}$ 是不可能被表成不超過兩相異單位分數的和的。

那麼，在甚麼情況下可以表成不超過兩相異單位分數之和呢？直接驗算可得

<u>命題四</u>

設 z, p, q 為正整數，如果 $r=\frac{p+q}{z}$ 是整數，則 $\frac{z}{pq}=\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}$ 。

只要在命題四取 $z=2, p=n, q=1$ 即得

<u>推論五</u>

如 $n \geq 3$ 為奇數，則 $\frac{2}{n}$ 必可表成兩相異單位分數之和。

由命題四也可看出，表成兩相異單位分數之和的式子也不一定唯一。例如

$$\begin{aligned}\frac{3}{56} &= \frac{3}{7\times 8} = \frac{1}{7\times\left(\frac{8+7}{3}\right)} + \frac{1}{8\times\left(\frac{8+7}{3}\right)} = \frac{1}{35}+\frac{1}{40} \\ &= \frac{3}{2\times 28} = \frac{1}{2\times\left(\frac{2+28}{3}\right)} + \frac{1}{28\times\left(\frac{2+28}{3}\right)} = \frac{1}{20}+\frac{1}{280}\end{aligned}$$

有沒有唯一的時候呢？有。考慮

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad \cdots \qquad (*)$$

設 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 。若 $a \neq 2$ 則 $a > 2$，即有 $\frac{1}{2} > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 。由 (*) 的左右相等迫使

$\frac{1}{2} > \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$，但這是不可能的，因 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 之間不存在任何單位分數。故 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 的表示式是唯一的。

命題四雖給出表成兩相異單位分數之和的充分條件，但卻非必要。例如

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{和}$$
$$\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

皆不能由命題四直接推出。不過，我們卻有以下較弱的充要條件。

<u>命題六</u>

設 z, n 爲互質正整數。

存在互質正整數 a, b 使 $\frac{z}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的充要條件爲存在正整數 p, q 使 $n = pq$ 及 $r = \frac{p+q}{z}$ 爲正整數。

命題四已保證了命題六的一半。現設存在互質正整數 a, b 使 $\frac{z}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ，即 $\frac{z}{n} = \frac{a+b}{ab}$ 。
由 a, b 互質可知 $ab, a+b$ 互質，加上 z, n 互質便知 $z = a+b, n = ab$ 。取 $p = a, q = b$ 則 $n = pq$ 及 $r = \frac{p+q}{z} = \frac{a+b}{a+b} = 1$ 爲正整數，故命題成立。

看了以上的分析，大家或許已體會到單位分數耐人尋味之處。有空的話不妨親自動手，或許可找到更多有趣的結果。從教學的角度看，古埃及人的單位分數堪稱「老幼咸宜」。如欲發掘更多教學靈感，可參考 Hurd (1991)及 O'Reilly (1992a, b)。

參考資料

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics, 6th ed.* Philadelphia: Saunders. （中譯本《數學史概論》由歐陽絳譯，台北曉園出版，1993。）

Hurd, S. P. (1991). Egyptian fractions: Ahmes to Fibonacci to today. *Mathematics Teacher*, *84*(7), 561-568.

O'Reilly, D. (1992a). Creating Egyptian fractions: A discussion of some methods. *Australian Mathematics Teacher*, *51*(1), 10-13.

O'Reilly, D. (1992b). The Isis problem and Egyptian fractions. *Australian Mathematics Teacher, 51*(2), 27-29.

徵稿

《數學教育》第八期將不設既定主題，仍刊載多樣化的文章。論述、短文、課堂教學問題、教學上所遇到的數學問題等，只要能引起對教學或數學教育問題的注意，增加對問題之了解及擴闊該方面的視野，均無任歡迎。