# 有趣的三角形的連比題

于志洪　　江蘇省泰州橡膠總廠職校

應用 1974 年第七屆加拿大《笛卡爾數學競賽》試題第六題：" 過△ABC 的頂點 C 任作一直線，與邊 AB 及中線 AD 分別交於點 F 及 E。求証：AE : ED = 2AF : FB"。可巧妙求解關於三角形的一類連比題。

**例一**　如圖 1，在△ABC 中，D、E 在中線 BM 上 AD、AE 的延長線交 BC 於 F、G，若 BF : FG : GC = 1 : 2 : 3，求 BD : DE : EM。

解：　設 BD = x, DE = y, EM = z,

$$\frac{x}{y+z}=\frac{2BF}{FC}=\frac{2\times 1}{2+3}=\frac{2}{5},$$

$$\frac{x+y}{z}=\frac{2BG}{GC}=\frac{2(1+2)}{3}=2,$$

$$\begin{cases}5x-2y=2z\\ x+y=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{7}z\\ y=\frac{8}{7}z\end{cases}$$

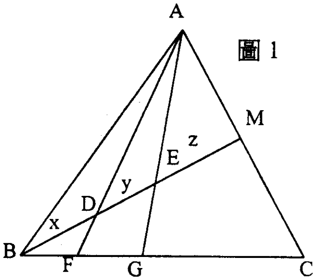


圖 1

$\therefore$BD : DE : EM = x : y : z = $\frac{6}{7}z:\frac{8}{7}z:z=6:8:7$。

**例 2**　如圖 2，在△ABC 中，D 是 AC 邊的中點，E、F、G 依次是 BD 的內點，且 AE、AF、AG 延長後依次交 BC 於 H、I、J，若 BE : EF : FG : GD = 104 : 160 : 165 : 143，則 BH : HI : IJ : JC = ？

解：設 BH = x, HI = y, IJ = z, JC = u

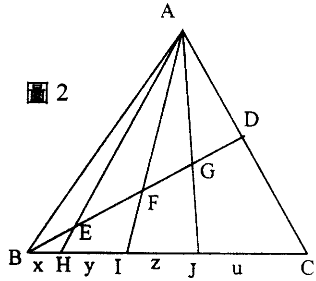
則 $\frac{104}{160+165+143}=\frac{2x}{y+z+u}=\frac{2}{9}$

$$\frac{104+160}{165+143}=\frac{2(x+y)}{z+u}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{104+160+165}{143}=\frac{2(x+y+z)}{u}=3$$

$$\begin{cases}9x-y-z-u=0\\7x+7y-3z-3u=0\\2x+2y+2z-3u=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=4x\\z=3x\\y=2x\end{cases}$$

圖 2

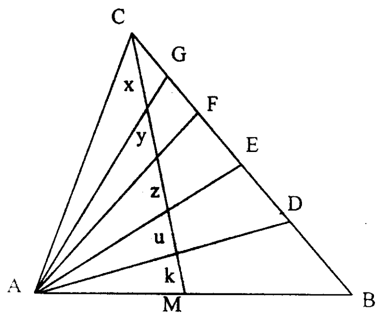



$\therefore BH:HI:IJ:JC=x:y:z:u=x:2x:3x:4x=1:2:3:4$。

**例 3**　三角形從一個頂點到對邊五等分點作線段，過第二頂點的中線被這些線段分成連比 $x:y:z:u:k$，設 $x\geq y\geq z\geq u\geq k$，求 $x:y:z:u:k$。

解：

$$\frac{x}{y+z+u+k}=\frac{2CG}{GB}=\frac{1}{2}$$




$$\frac{x+y}{z+u+k}=\frac{2CF}{FB}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{x+y+z}{u+k}=\frac{2CE}{EB}=3$$

$$\frac{x+y+z+u}{k}=\frac{2CD}{DB}=8$$

$$\begin{cases}2x-y-z-u-k=0\\3x+3y-4z-4u-4k=0\\x+y+z-3u-3k=0\\x+y+z+u-8k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3k\\y=\frac{15}{7}k\\z=\frac{45}{28}k\\u=\frac{5}{4}k\end{cases}$$

$\therefore x:y:z:u:k=3k:\ 3k:\frac{15}{7}k:\frac{45}{28}k:\frac{5}{4}k:k=84:60:45:35:28$