論孿生重圓數

張贇 甘肅省金昌市一中

本刊於 1997 年第 4 期(即文[1])介紹了重圓數的例子和一些簡單性質，受其啓發，筆者經過研究，發現了重圓數這個百花園中的株奇葩 -- 孿生重圓數及其簡單性質。現將有關結果整理如下，不妥之處，望同仁們指正。

◆ 1 重圓數與孿生重圓數

1.1 重圓數

設 P, n, m_i $(i = 1, 2, \ldots) \in \mathbf{N}$, $P^n = M$，把 M 從左向右分拆成若干個整數 $m_1, m_2, \ldots, m_k$，使 $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = P$，則把自然數 P 叫做次重圓數。特別地，當 $n = 1$ 時，把 P 叫做平凡重圓數。

如 $1^2 = 1$;

$10^2 = 100,\ 10 + 0 = 10;$

$26^3 = 17576,\ 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26, \ldots$ ，

則把 1, 10 叫做二次重圓數，26 叫做三次重圓數。

當 n 爲無窮時，把 P 叫做無窮次重圓數。

因爲分拆實質上是一種變換，不妨將這種變換記爲$\xrightarrow{T}$，如

$$9^3 = 729 \xrightarrow{T} 72 + 9 = 81 \xrightarrow{T} 8 + 1 = 9$$

1.2 孿生重圓數

設 P_1, P_2 是兩個重圓數，若 $P_1 = P_2 + 1$ 或 $P_2 = P_1 + 1$，則把 P_1, P_2 互稱孿生重圓數。如

$8^3 = 512 \xrightarrow{T} 5 + 1 + 2 = 8,$

$9^3 = 729 \xrightarrow{T} 72 + 9 = 81 \xrightarrow{T} 8 + 1 = 9,$

說明 8, 9 都是三次重圓數。由於 $9 = 8 + 1$，所以 8, 9 爲孿生重圓數，且爲三次孿生重圓數。

◆ 2 孿生重圓數的簡單性質

2.1 任何兩個連續自然數爲平凡孿生重圓數；

2.2 0 和 1 是無窮次孿生重圓數；

2.3 $10^n - 1$ 和 10^n 是無窮次孿生重圓數；
2.4 設 P_1, P_2 互爲孿生重圓數，且 $P_2 > P_1$，則 $P_2 - P_1$ 是無窮次重圓數。

性質 2.1 和 2.2 是顯然的，下面證明性質 2.3 和 2.4。
先來看性質 2.3 的證明，我們用數學歸納法。

證明　當 $n = 1$ 時，$10^1 - 1 = 9, 10^1 = 10$
$\because$ 9, 10 爲平凡孿生重圓數，
$\therefore$ $10^1 - 1$ 和 10^1 是平凡孿生重圓數。
$\because$ $9^2 = 81 \xrightarrow{T} 8 + 1 = 9, 10^2 = 100 \xrightarrow{T} 10 + 0 = 10$，
$\therefore$ $10^1 - 1$ 和 10^1 是二次孿生重圓數。

假設 $10^1 - 1$ 和 10^1 爲 k 次孿生重圓數，即 $9^k \xrightarrow{T} 9, 10^k \xrightarrow{T} 10$,
那麼 $9^{k+1} = 9 \cdot 9^k \xrightarrow{T} 9 \cdot 9 = 81 \xrightarrow{T} 8 + 1 = 9, 10^{k+1} = 10 \cdot 10^k \xrightarrow{T} 10 \cdot 10 = 100 \xrightarrow{T} 10 + 0 = 10$ 說明 9, 10 爲無窮次孿生重圓數，$\therefore 10^1 - 1$ 和 10^1 爲無窮次孿生重圓數。
當 $n = 2$ 時，$10^2 - 1 = 99, 10^2 = 100$
$\because$ $99^2 = 9801 \xrightarrow{T} 98 + 0 + 1 = 99, 100^2 = 10000 \xrightarrow{T} 100 + 0 + 0 = 100$
$\therefore$ 99, 100 爲二次孿生重圓數

假設 99, 100 爲 k 次孿生重圓數，即

$$99^k \xrightarrow{T} 99, 100^k \xrightarrow{T} 100,$$

那麼 $99^{k+1} = 99 \cdot 99^k \xrightarrow{T} 99 \cdot 99 = 9801 \xrightarrow{T} 98 + 0 + 1 = 99$，$100^{k+1} = 100 \cdot 100^k \xrightarrow{T} 100 \cdot 100 = 10000 \xrightarrow{T} 100 + 0 + 0 = 100$
說明 99,100 爲無窮次孿生重圓數，
$\therefore$ $100^2 - 1$ 和 100^2 爲無窮次孿生重圓數。
……
同理可證
$10^n - 1$ 和 10^n 爲無窮次孿生重圓數。

再來看性質 2.4 的證明
證明　$\because$ P_1, P_2 互爲孿生重圓數，且 $P_2 > P_1$，$\therefore$ $P_2 - P_1 = 1$
$\because$ $1^k = 1\ (k \in \mathbf{N})$　$\therefore$ 1 是無窮次孿生重圓數
$\therefore$ $P_2 - P_1$ 是無窮次孿生重圓數。

◆ 3　一位至三位自然數中的二次、三次孿生重圓數

3.1 一位三次孿生重圓數爲 8 和 9

事實上， $8^3 = 512 \xrightarrow{T} 5 + 1 + 2 = 8$, $9^3 = 729 \xrightarrow{T} 7 + 2 + 9 = 18 \xrightarrow{T} 1 + 8 = 9$。

一位自然數中無二次孿生重圓數。

3.2 二位三次孿生重圓數爲 17 和 18, 26 和 27, 27 和 28, 62 和 63, 71 和 72, 81 和 82, 共 6 對。

事實上， $17^3 = 4913 \xrightarrow{T} 4 + 9 + 1 + 3 = 17$,

$18^3 = 5832 \xrightarrow{T} 5 + 8 + 3 + 2 = 18$,

$26^3 = 17576 \xrightarrow{T} 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$,

$27^3 = 19683 \xrightarrow{T} 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$,

$28^3 = 21952 \xrightarrow{T} 2 + 19 + 5 + 2 = 28$,

$62^3 = 238328 \xrightarrow{T} 23 + 8 + 3 + 28 = 62$,

$63^3 = 250047 \xrightarrow{T} 2 + 50 + 0 + 4 + 7 = 63$,

$71^3 = 357911 \xrightarrow{T} 3 + 57 + 9 + 1 + 1 = 71$,

$72^3 = 373248 \xrightarrow{T} 37 + 3 + 24 + 8 = 72$,

$81^3 = 531441 \xrightarrow{T} 5 + 31 + 44 + 1 = 81$,

$82^3 = 551368 \xrightarrow{T} 5 + 5 + 1 + 3 + 68 = 82$。

二位自然數中無二次孿生重圓數。

3.3 三位二次孿生重圓數爲 369 和 370, 990 和 991, 共 2 對。

事實上， $369^2 = 136161 \xrightarrow{T} 1 + 361 + 6 + 1 = 369$

$370^2 = 136900 \xrightarrow{T} 1 + 369 + 0 + 0 = 370$,

$990^2 = 980100 \xrightarrow{T} 980 + 10 + 0 = 990$,

$991^2 = 982081 \xrightarrow{T} 982 + 0 + 8 + 1 = 991$

◆ 4　結束語

綜上論述，探尋自然數集中的孿生重圓數，是一件有趣且誘人的事，而揭示、發現判定兩個自然數是否二次和二次以上的孿生重圓數之規律、方法及自然數集中共有多少個非平凡孿生重圓數，這將是這有趣之事中的更美者。

[參考文獻]

黃志華，豈止"破鏡重圓"，香港《數學教育》，1997，4 : 91-93 。