

來自古埃及的教學靈感

馮振業 香港教育學院

做學問功夫最大的敵人，莫過於跳不出固有的思想框框。對於唸了數學十來年，又教了數學十來年的人來說，一切彷如教條法規，不容置疑。學數學必先學四則運算，計乘數先唸九九歌訣…… 試問有誰關心一疊疊理所當然的方法背後，可會另有洞天？

從教學的角度看，任何「想當然」的惰性皆不應縱容。今天我們這般計乘數，這般算分數，大家都習慣了，很自然的，也很順利的，沒甚麼值得問吧！可是，遠在超過三千六百年前的埃及，人們就不是這麼計、這麼算！誰說他們古老、落後，能建造金字塔的古文明，我們可憑甚麼質疑他們的計算能力呢？

對古埃及人來說，要懂得兩正整數相乘，只需懂得加數和如何倍大即可。換句話說，他們的乘數表只有兩列：一乘和二乘。

一一如一 一二如二 …… 一九如九
二一如二 二二如四 …… 二九得十八

他們的做法如下：

假如求 12×13 。

先寫下	1	12
再分別倍大得	2	24
重複倍大得	4	48
至左欄再倍大即超越 13 為止	8	96
找出左欄哪些數之和為 13	1、4、8	
求對應 1、4、8 的右欄各數之和 即所求積		$12 + 48 + 96 =$ 156

即 $12 \times 13 = 156$ 。

不妨著學生自己動手檢視這個「匪夷所思」的方法的正確性，既可令學生享受「尋幽探秘」之樂，亦可同時操練運算本領，一舉兩得。熟習了這個方法之後，必有學生提出

問題一 爲甚麼這個方法行得通？

雖然古埃及人跟我們一樣用十進記數法，但是除了上述的乘法是這麼的「離經叛道」外，就是分數的處理也叫人莫名其妙。他們習慣把一般在 0 與 1 之間的分數寫成若干個相異單位分數 (Unit fraction) 之和。所謂單位分數，是指分母是正整數，而分子是 1 的分數。明白了古埃及人喜歡把一般的乘數化成倍大與求和的玩意，不難想像蘭德紙草書 (Rhind Mathematical Papyrus) 中甚至載有由 $\frac{1}{5}$ 至 $\frac{1}{101}$ 的所有奇分母單位分數的倍大後的單位分數和式。

問題二 是否所有 0 與 1 之間的分數皆可表成相異單位分數之和？如是，有否系統方法做到？

以下是一些示例：

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}。$$

最好讓學生分組工作，找多些這樣的算式。做多了，他們自會對問題二產生自己的想法。

接下來，可讓學生探討一連串的相關問題：

問題三 單位分數本身可否表成不少於兩個相異單位分數之和？

問題四 表成相異單位分數之和的式子是否唯一？如否，會有多少個這樣的式子？

問題五 是否所有可表成相異單位分數之和的分數皆可表成不超過兩個相異單位分數之和？如否，在甚麼情況下可以？

問題六 表成不超過兩個相異單位分數之和的式子是否唯一？

雖然本文提出的六個問題皆可與小學生一同探討，可是，要找到嚴謹的解說，卻未必所有中六學生皆能辦到。因此，這些問題對資優學生同樣具挑戰性。

研習古埃及人的這些「另類」數學行徑，除了可提供豐富的數學探索經驗外，最重要還是它開了我們的眼界，展示了數學衍生的非單一性，棒喝了那些「想當然」的學習文化。當然，我們也不應忽視這些「另類」數學行徑沒落的原因。

參考資料

- Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics, 6th ed.* Philadelphia: Saunders. (中譯本《數學史概論》由歐陽絳譯，台北曉園出版，1993。)
- Katz, V. J. (1996). Egyptian mathematics. In *Proceedings of the História e Educação Matemática, ICME-8 satellite meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM)*, (vol. 1, pp. 45-53), 24-30 July 1996, Braga, Portugal.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thoughts from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press. (中譯本《數學史－數學思想的發展》由林炎全、洪萬生、楊康景松譯，全三冊，台北九章出版，1983。)
- Robins, G., & Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus: An ancient Egyptian text.* New York: Dover.