2，2.00，$\frac{2}{1}$，200% 相等嗎？

黃毅英
退休數學教育工作者

顯而易見，這幾個數的數值肯定相等。這令我想起我在大學一年班頭幾課（可能還是第一課！）受教於梁鑑添博士的一段故事，我在《數學教師不怕給學生難倒了！》[3] 一書也已經寫了：

> 一位數學系教授問大一學生，1 + 1 是否等於 2？左邊有三個符號，右邊有一個符號，怎麼可能相等？他還補充說，兩個 5 角的硬幣在體積和重量上均不等於一個 1 元的硬幣。如果認為這樣的說法是強詞奪理，我們看現實生活中的投幣機器就知道了。有些投幣機器（如自動售賣機，投幣電話等）只接受 1 元的硬幣，卻不認兩個 5 角的硬幣。所以，首先我們要問的應是「什麼是『=』」？（頁 56）

當時他想解釋什麼叫等價關係。在數學上，如果對於數字，相等一般上是指數值相等。但是還有很多「相等」的情況，例如形狀（一般叫「全等」congruent）、集合[4]、序偶、多項式、矩陣、向量等等（還有同胚、同構…）。他繼續指出，嚴格來說，沒有兩件東西是相等的，所謂相等，是在某個等價關係上相等。就算簡單如 $\frac{2}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$，它們「本來」[5]是兩件事——「4 件餅吃了 2 件」和「2 件餅吃了 1 件」的處境顯然不一樣！——但在「$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ 當 ad = bc」這個等價關係變成相等。在中學階段，$\frac{x^2-1}{x-1}$ 和 x+1 也不相等，起碼當 x = 1 時左邊沒定義，也是透過某個等價關係[6]令它們相等了。

---

3 黃毅英、張僑平、許世紅、蘇洪雨、陳鎮民、張家麟、黃麗珍、謝明初、蔡勁航（2012）。《數學教師不怕給學生難倒了！——中小學數學教師所需的數學知識》。武漢：華中師範大學出版社。繁體字版：香港教育局數學教育組（2013）。
http://www.edb.gov.hk/attachment/en/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet%2014.pdf

4 起初可能較難接受{1, 2, 3, 4, 5} = {4, 5, 2, 2, 3, 4, 1, 4}。

5 加了引號因為要看推論的出發點。

6 $f \equiv g$ 如果存在一有限集 C 使得 $f(x) = g(x)$，$\forall x \in R \backslash C$。

對於以上幾個數字，首先講 2 和 2.00。按照數學定義，abc.def（當然可延伸到更多個位）是 $a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0 + d \times 10^{-1} + e \times 10^{-2} + f \times 10^{-3}$，故此 $2.00 = 2 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} = 2 + 0 + 0 = 2$。

大家可能即時聯想到近似值，不過正規來說，若果 2.00 是 N 的近似值，我們不應寫 N = 2.00，其實應該寫 N ~ 2.00，又或

(*)　N = 2.00（三個有效數字）

或者

(#)　N = 2.00（準確至兩個小數位）。

無論 (*) 或 (#)，式子內的「=」不是獨立存在的，必須連同「三個有效數字」（或「準確至兩個小數位」）來理解。當然有些人寫「N = 2.00」是隱含（understood）它代表近似值，不過仍是寫「N ~ 2.00」較妥。

所以如果不標明「~」，2.00 就是 2。2.00 的問題出現，往往是源於運算的結果，例如：

　　1.09 + 0.91

=　2.00

小數點之後的「00」完全可以刪去。至於不刪去是否「錯」，當然 2.00 的「.00」是多餘（就像中文老師告誡我們不要寫「曾經一度」之類），刪去是好習慣，不過不刪去在數值上很難說它們不相等（當然如果答案要求寫 __元__角__分，答案恰巧 2 元 0 角 0 分又當別論）。

你可以說，寫支票又往往加「00」，如「\$2.00」，甚至「\$2.00」、「\$2.—」、「\$2.$\frac{00}{xx}$」。眾所周知這是該方面的習慣，以防篡改。在數值上 2 和 2.00 相等。我們還會在千位加「,」，如 \$1,234.56（歐洲有些國家倒過來：\$1.234,56）[7]，這不是數學表示法，但我不會說加「,」是錯。不過小學數學理應教授日常生活接觸到的數學，所以在貨幣這單元／課題（並涉及千位以上的數時）提到在書寫貨幣的特定情況下，千位加「,」也是好的。

百分比也有類似情況。當然 2 和 200% 在數值上相等。但在文意上就會有一點差異。例如我們在日常用語當中很少會說，價格升了 2（或升了

7　https://en.m.wikipedia.org/wiki/Decimal_separator。

0.5 倍之類），只會說升了 200%（或升了 50%）。當然為消「升到 2 倍」和「升了 2 倍」的歧義，可考慮用更精準的數學語言：新的數是原有的數的 300%（甚或 $y = 3x$）。無論如何，2 和 200% 在數值上相等無可置疑，但在某些處境，我們想強調百分比時便會用 200%。其實 % 就是「$\times\frac{1}{100}$」，200% 就是 $\frac{200}{100}$（當然可進一步化簡），50% 就是 $\frac{50}{100}$。

事緣有題目要求學生把答案約至最簡[8]，而答案剛巧是 $\frac{2}{1}$。老師指出沒有進一步化簡到 2。當然老師是有道理的，不過如果我們（無論老師一方還是學生／家長一方）往往只糾纏在答案的對或錯，又或扣不扣分、扣多少分，就很可能錯失了讓學生進一步了解數學的機會。當然我沒有訪問學生當時腦海中想些什麼，但是我估計他之所以沒有進一步化簡不是懶惰或者粗心大意，而是因為整條題目的考慮範圍（scope）是分數，在分數的世界 $\frac{2}{1}$ 已經是最簡的了。但是可以讓學生正式把 $\frac{n}{1}$ 這一類分數和整數連繫起來。事實在數學上這不是太直接的事情（所以小學生一時未能把 $\frac{n}{1}$ 和 n 連繫起來是不足為奇的）。如果翻看任何一本集合論的書（當然我們要在特定的歷史背景去解讀整件事情），例如梁鑑添博士和郭麗珠博士合寫的《初等集合論》，數學上也要用一些功夫去解說[9]。當然我們不應該鑽入這些數學細節，想指出的是，$\frac{n}{1}$ 和 n 相等，在學生心裏不一定是一件很自然的事，當然亦不是那麼困難，稍為點出一下就可以了。這一次學生答題稍為不完整正正是一個好契機。

作者電郵：pemaNYWong@gmail.com

8 其實「最簡」在數學上沒定義。2^9、1024；$(x-1)(x-2)$、x^2-3x+2 哪個簡單些？

9 《初等集合論》要到卷二第六章「自然數」才有所解說。簡略地說，首先有自然數，再建立整數，然後再用一對整數 (m, n)（當然 $n \neq 0$）去定義分數，其中若「$ad = bc$」，兩個分數 (a, b)、(c, d) 視為相等（即是約分——確切來說，是透過「商集」quotient set）。最後利用一個映射把 $(a, 1)$「確認」identify 為 a，亦即 $\frac{a}{1} = a$。 見頁 89。