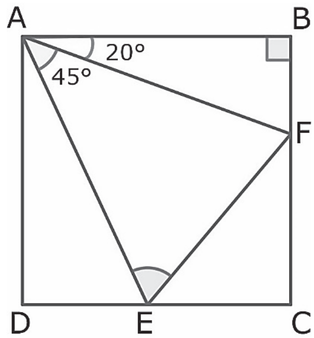
一道中學幾何問題的反思

周令軒
香港華人基督教聯會真道書院
蕭文強
香港大學數學系

『*妙算還從拙中出*』

~*華羅庚*

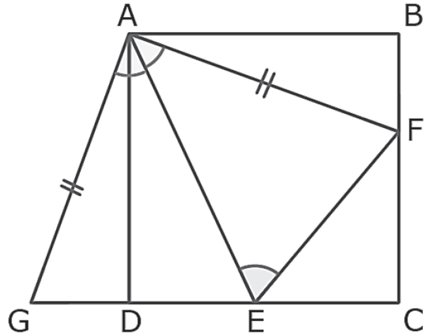
某日黃昏，本文作者之一與另一位作者分享一道幾何問題。作者曾經把這道問題給中三的同學思考，從他班裡的學生收到不同的解答方法。先談談這一道既簡單又直接的問題吧，問題如下：「已知 $ABCD$ 為一正方形，F 是 BC 上的一點使得 $\angle BAF = 20^{\circ}$，E 是 CD 上的一點使 $\angle FAE = 45^{\circ}$。求 $\angle AEF$。」（見圖一）



圖一

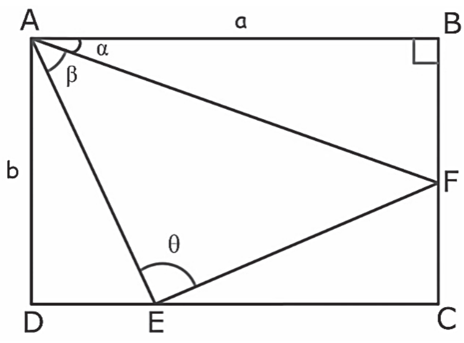
學生皆踴躍作答，得到許多不同的解。有些學生運用 *GeoGebra* 構作上圖並量度 $\angle AEF$，得出它的值為 65°，有些學生則（不失一般性，不妨假設正方形邊長為 1 單位）用三角學的方法計算邊長，從不同途徑入手計算 $\angle AEF$ 的數值。（相信學生是透過三角對數表和計算機計算，得出值非常近似 65°，故取答案為 65°。沒有學生運用正弦定律這個最直接的方法求解，因為他們還未學到這條定理。）但在芸芸眾多方法之中，一個簡潔優美的

方法脫穎而出！學生在老師提示下，僅僅運用中一程度的綜合幾何，就能計算出準確值65°。從圖二可見，同學的「妙法」是先把 CD 從 D 點延長至 G 點，使得 $AG = AF$ 。由此可見ΔAGD 與ΔAFB 是全等，故得$\angle GAD = \angle FAB = 20^\circ$。因為$\angle GAE = 45^\circ = \angle FAE$，所以$\Delta AGE$ 與ΔAFE 也是全等，最後得到$\angle AEF = \angle AEG = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$這個完美答案。



圖二

看到這個「妙法」後，另一位作者即時提出以下疑問：「究竟是什麼條件容許我們得出如此簡單而準確的答案？」或許我們能從一個較一般的情況找出一些蛛絲馬跡 — 讓我們考慮長方形 $ABCD$（把題目的條件放寬是數學探究中慣用策略）。明顯地，仿效上述同學運用 *GeoGebra* 的構作，$\angle AEF = \theta$ 是確定的，故必能被計算出來。（見圖三）



圖三

運用正弦定律在ΔAEF上，我們得出以下結果：

$$\frac{\dfrac{a}{\cos\alpha}}{\sin\theta}=\frac{\dfrac{b}{\sin(\alpha+\beta)}}{\sin\big(\pi-(\theta+\beta)\big)}\ ,$$

$$\frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\theta}=\frac{b\cos\alpha}{a\sin(\alpha+\beta)}\ ,$$

化簡後即得

$$\cot\theta=\frac{b\cos\alpha}{a\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}-\cot\beta \qquad \text{...... (*)},$$

其中 a 和 b 分別為 AB 和 AD 的邊長， α 是$\angle BAF$ 的值， β 是$\angle FAE$ 的值。以上公式是這一道問題的一般解答。

現在，如果我們將條件限制為正方形會怎麼樣呢？因為 $a=b$，公式 (*) 可以簡化為：

$$\cot\theta=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}-\cot\beta \qquad \text{...... (**)。}$$

取$\angle FAE=45^\circ$，則 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$，並且 $\cot\beta=1$。公式 (**) 可進一步簡化為：

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}-1\ ,$$

運用複角公式可再簡化得：

$$\cot\theta=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} \qquad \text{........................ (***)。}$$

注意 (***) 實則等於

$$\begin{aligned}\cot\theta&=\frac{\cot\alpha-1}{\cot\alpha+1}\\&=\frac{\cot\alpha-\cot\dfrac{\pi}{4}}{\cot\alpha\cot\dfrac{\pi}{4}+1}\\&=\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\ ,\end{aligned}$$

故此可得 $\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{4}$。留意到 $\theta = \angle AED$，難怪「妙法」能透過綜合幾何在 $ABCD$ 為正方形和 $\angle FAE = 45^\circ$ 的情況下靈巧地算出結果！

上述通解，頗值得我們再仔細看看，讓我們將通解與原初題目比對一番。無疑，原初題目因為它的獨特性，可以透過一個簡潔的「妙法」求解。相對地，上文提及的通解，或者同學透過三角運算的方法，似乎是一些冗長、繁複、因循的「拙法」。但是，如果題目一改，$\angle FAE$ 並非等於45 度，或者 $ABCD$ 為長方形而非正方形，「妙法」頓時「妙」不出來！變得無用武之地！相反，「拙法」雖看似麻煩笨拙，卻相對基本，能解決一般情況的問題，同學亦只需掌握基本三角知識就能求解。從上文的討論可見，「拙法」而得的通解甚至能清楚解釋「妙法」的來龍去脈。由此可見，基本而看似笨拙的方法反而更具數學威力！學習數學怎能不把「妙法」和「拙法」兩者兼收並蓄呢？

作者電郵：chowlh@logosacademy.edu.hk