角平分線不是中線

潘維凱
聖保羅書院

角平分線

角平分線是平面幾何中的一個基礎知識，一條射線將一角平分為兩相等角。初中課程要求學生理解角平分線的性質，即平分線上的點與角的兩邊等距這個特性；學生亦須理解為何三角形的三條角平分線共點，從而引入三角形的內心的定義（教育局 2020，p.48）。

角平分線既然將角平分，又如何將對邊分割？

角平分線平分對邊？角平分線豈不是中線？

無論老師如何講解，學生總會出現這種誤解；當老師用盡千方百計否定角平分線將對邊平分時，倒不如確實地討論角平分線如何將對邊分割。

角平分線定理

任意 $\triangle ABC$，假設 D 點為角 A 的角平分線與對邊 BC 的交點（圖 1）。

角平分線定理：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$

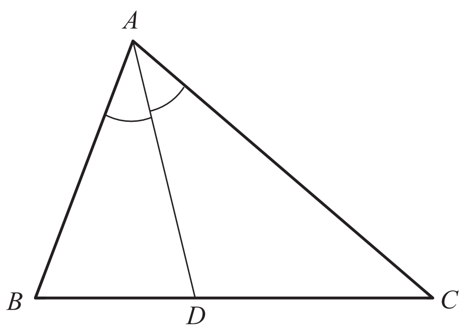

圖 1

<u>證明</u>（利用等高三角形面積比）

$BD : DC = \triangle ABD$ 的面積 $: \triangle ADC$ 的面積

另外，角平分線的性質，點 D 到 AB 及 AC 距離相等，亦即以 AB 及 AC 為底，$\triangle ABD$ 及 $\triangle ADC$ 等高（圖 2）。所以

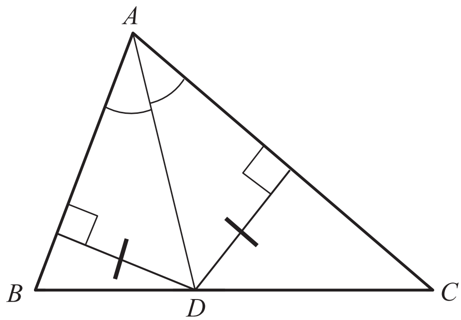

圖 2

$AB : AC = \triangle ABD$ 的面積 $: \triangle ADC$ 的面積

所以 $BD : DC = AB : AC$

<u>例題</u>

下圖$\triangle ABC$，$AB = 3$，$BC = 4$，$CA = 5$。AD 和 BE 為角平分線，點 I 為$\triangle ABC$ 的內心（AD 及 BE 的交點）。求

(a) BD

(b) $AI : ID$

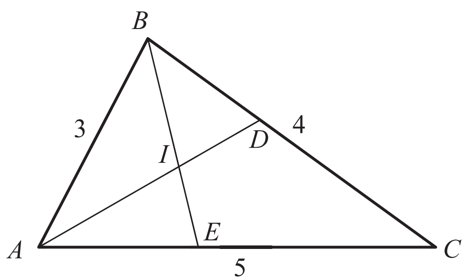

圖 3

解

利用角平分線定理，$BD : DC = AB : AC = 3 : 5$，所以

(a) $BD = 4 \times \dfrac{3}{3+5} = 1.5$

(b) $AI : ID = AB : BD = 3 : 1.5 = 2 : 1$

然後…

課堂應如何發展？按著不同的教學目的，以下是其中一些例子。

1) 探索（外）角平分線定理的證明
其他常見證明如構作平行線、利用相似三角形、利用正弦定理等。

2) 構作角平分線及探索角平分線定理之逆定理

3) 利用角平分線定理證明三線共點
承例題，$\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{c}{a \times \frac{c}{b+c}} = \dfrac{b+c}{a}$，$C$ 的角平分線亦以同樣比例分割 AD，所以三角平分線共點。當然如可運用塞瓦定理（Ceva's Theorem），證明更直接。

4) 創作奧數題
例題中 $AI : ID = 2 : 1$，跟三角形形心 G 在中線上的比例相等，即 GI 和 BC 平行。另一邊 $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{b+c}{a} = 2$，所以 $2BC = AB + AC$。
奧數題：三角形 ABC 中，$AB \neq BC$，GI 和 BC 平行，點 G 及點 I 分別為三角形 ABC 的形心及內心。證明 GI 和 BC 平行當且僅當 $2BC = AB + AC$。

不過，最重要的還是老問題：角平分線會否等分對邊？

如果角平分線將對邊平分、即 $BD = DC$，利用角平分線定理學生應可得出結論 $AB = AC$。所以，只有當三角形為等腰三角形時，角平分線才會將對邊平分，角平分線與中線重疊。

參考文獻

教育局（2020）。《初中數學課程闡釋（二零二零）》。香港：教育局。

POON, W. H. B.（2007）。Several proofs of Ceva's Theorem by students。《數學教育》25，76 – 81。

作者電郵：whp@spc.edu.hk