

為三角形「度高」：以 3D 打印筆進行 建構式學習的課堂構思

曾詠琪 吳藹藍
香港中文大學

常言道，現今的課堂應要更多的融合科技，以提高教學效能，並推動 STEM 學科發展，以支援未來創科行業的人才需求。隨著科技的發展，電子科技在數學課堂上應用越來越普及，以方便老師進行授課，以及和學生交流。特別在授課方面，很多課題都應用電子工具來教授，例如在度量、圖形與空間範疇中應用更多如 GeoGebra 的工具，協助學生在動態的環境下看到圖形的特性 (Leung, Baccaglini-Frank, & Mariotti, 2013)。雖然各種科技和課堂都轉向電子化，需要動手做的課堂活動在教學科上仍然有一定的益處，而電子科技的應用為動手做的模式提供了新的可能。

「造中學」(Learning as Making)

第二作者在過去五年中致力在香港中小學的數學課堂探討和研究由科技支援的建構式教學法，稱之為「造中學」(Learning as Making)(Ng & Chan, 2019; Ng & Ferrara, 2020)。「造中學」是指學生在學習數學時參與「造」(Making)的過程，以迎合人類以雙手創新的天性和對製造的好奇(Flemming, 2015)。「造」強調空間感訓練以及實踐式學習，期望學生在學習過程中利用手勢、以至全身的感觀來體驗數學，讓學生有更能在多模態環境下學習。「造中學」是基於 Papert (1980) 革命性的建構主義學習理論(Constructionism)，其理論強調知識不應由教授者傳授予學生，而是讓學生在現實中的實質活動中自行建構出來。其中最重要的是，在建構式學習環境中，學生不再單純是知識接收者，而是以創造者的角色，從「造」的活動中建構知識，期望學生在目標為本、開放式的建構活動中，建立和應用數學思維。正因如此，「造中學」這個教學法希望達致的是學生在創作中學習，並從中發展出創新的解難技巧，而並非只停留在找出正確答案，以回應 Renert (2011) 提出的：

現今課堂中的數學解難大多建基於——每個問題只有一個老師已知的標準答案——這種難以有挑戰性的假設上。學生的創意因而被重覆解有標準答案的問題所限制。(頁 223)

結合 3D 打印筆的「造中學」課堂構思

最近，研究團隊正積極和不同的中小學數學老師合作，在數學課堂上以 3D 打印筆實行「造中學」教學法。3D 打印筆是一個可以用單手操控的 3D 打印技術，猶如一個筆狀的熱熔膠槍，以特別的熱熔膠物料作為筆芯。筆芯物料從 3D 打印筆唧出後能在半空中瞬間固化，隨著手部的移動便可畫出平面，以至立體模型（見圖 1）。

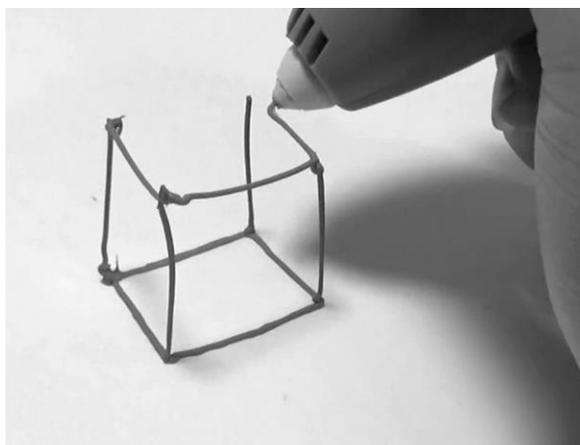


圖 1：以 3D 打印筆畫出立方體

而在研究期間，團隊在和數學老師的討論中發掘到一個相信能協助學生正確認知三角形底、高的教學法。根據課程發展議會（2017）的課程指引，小五學生「須認識三角形…各條邊對應的高」，以學習三角形的面積公式。其中部分老師反映當中常見的學習難點：在三角形中選取不同的邊作為底時，學生難以正確找出對應的高。這難點在鈍角三角形中尤其嚴重，因為不同於其他已學的平面圖形（例如長方形和平行四邊形），以非最長邊為底的鈍角三角形，其最高點並不在底的上方。學生有時難以理解為何需要加上延長線延長三角形的底，以找出三角形相對的高，以致不能正確找出每對底和高。

為此參與討論的老師進行了熱烈的討論，研究團隊基於討論內容有了以下的課堂構思，可以在教授三角形公式的課堂上讓學生用 3D 打印筆以「造中學」學習相關知識（見附錄）。

(一) 由學生畫出任意三角形

學生可以個人或分組形式用 3D 打印筆畫出不同的任意三角形。研究團隊認為可以用三種不同顏色的筆芯，分別畫出三角形的三條邊，以標示出三角形的各個邊（見圖 2 為「藍」，「橙」，「綠」），並可在之後的教學活動中，讓學生能用言語清楚指出不同顏色的底及其對應的高。研究團隊期望學生會畫出不同大小，以至不同種類的三角形，包括等邊三角形、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形等，從而在活動後期能探索不同的可能性。

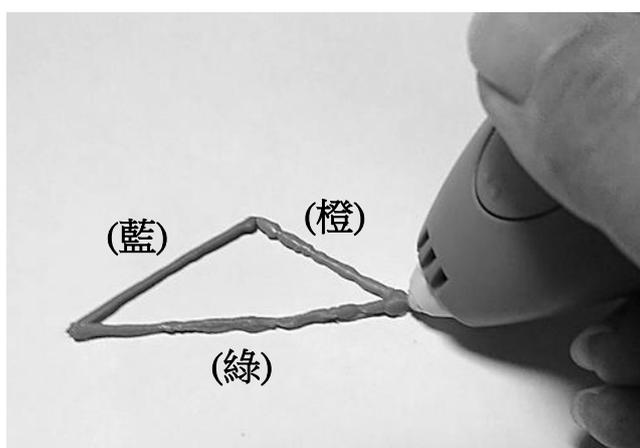


圖 2：用 3D 打印筆畫出三角形模型

(二) 學生取出並移動三角形模型

學生取出自己畫出的三角形模型後，可以平移、旋轉、甚至把三角形模型立起（見圖 3），讓學生可以從不同的角度觀察同一個三角形。其中學生立起三角形模型的動作，能有助學生了解及後老師所介紹的三角形的高這個概念。

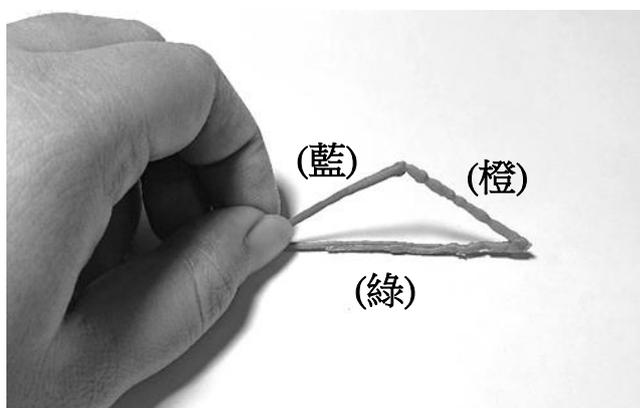


圖 3：把三角形模型立起

(三) 老師引導讓學生探索三角形的高

老師可首先以人的高度作引子，引導學生說出如何為人量度高度。研究團隊預期學生能清楚地說出量度高度應該由人的最高點垂直拉一條線到地面，其線段的長度便是人的高度。及後老師可詢問學生，若把人轉換為三角形模型應如何量度高度，並可嘗試讓學生以直尺自行量度手中三角形模型的高度。研究團隊期望學生可以立起三角形，並以直尺垂直由檯面量度至三角形的最高點，以得出三角形的高。當中直尺的擺放方法是焦點之一（見圖4）。

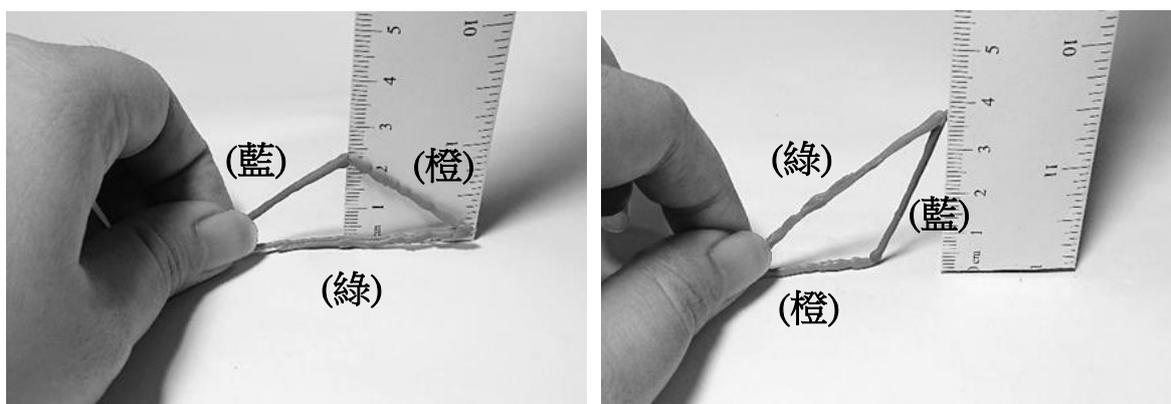


圖4：(左) 在三角形模型後放置直尺；(右) 在三角形模型旁放置直尺

(四) 介紹三角形的底和高

學生成功量度三角形的高度後，便可向學生介紹正確的數學詞匯：在三角形立起的時候，貼近地面或檯面的邊稱為底；由底到三角形的最高點量度出來的長度，便是對應的高。及後在黑板中展示如何用紙筆在三角形上標示底及高，將活動體驗轉化成數學知識。值得留意是學生早前擺放直尺的位置。即使是銳角三角形，學生或會把三角形和直尺重疊，或把直尺放在三角形的旁邊以量度高度。老師可以藉此強調，即使是同一個高，仍然可以有不同的標示方式（三角形內或外），亦可為解釋鈍角三角形的高作鋪墊。

(五) 找出不同的底及其相應的高

老師可以提示學生，三角形站立的方法並不只有一種，繼而讓學生借轉動手中的三角形模型，了解到不同的站立方法，會引申出不同的底及其對應的高。此時可以工作紙為輔助，指示學生以不同顏色的邊作為底，量

度對應的高，並記錄在工作紙上。學生手中的三角形模型亦可以膠紙黏貼在工作紙上，以作記錄。

特別強調的是在鈍角三角形的情況下，如果不是以最長的邊作底的話，最高點將不會在底的上方。而較早時學生把三角形立起的經驗，以及早前關於為人量度高度的討論，學生應不難把尺放在三角形的旁邊並量度高度。老師在教授如何將這個過程轉為用紙筆標記時，可以把底的延長線比喻為檯面、以高比喻為直尺。

為何要為三角形「度高」

以上為在三角形面積的課題上應用「造中學」的課堂構思，而其中在「造」的過程有三個時機至為重要。其一，繪畫出三角形模型後，學生可以立起模型。三角形本來是平面圖形，但日常生活中，學生對於高度的認知源於立體世界。將三角形模型立起，可以讓平日看到的平面圖形立體化，藉此可結合學生在立體世界中的經驗和認知。其二，學生把直尺放在三角形的後面或旁邊。透過用直尺為立起的三角形量度高度，學生能為三角形量度高度一事具象化，更具體了解三角形的高。其三，學生旋轉三角形，以將不同的邊作為三角形的底。比起讓學生轉動紙張以找出三角形不同的底，手中所畫的三角形模型可以讓學生直接旋轉，並以不同的邊立坐在桌面上，更直觀地感受到三角形能有三組不同的底和對應的高這個認知。

整個「造中學」教學活動中，動手探索的經驗有助學生直觀地觀察三角形，並透過不同的動作感知到三角形的底和高。新的數學概念亦能基於現實世界中的經歷而建立和內化，而非由第三者直接告知。及後在脫離使用三角形模型時，學生用手勢和全身的感知體驗亦有助學生在腦海中幻想三角形的移動，任何時候都可以從不同角度「看」到三角形的底和高。

從第二作者近期的一個實證研究結果指出，相比起動態幾何軟件，應用 3D 筆更能協助學生保留幾何範疇的學習成果 (Ng, Shi & Ting, 2020)。而在教學活動中應用 3D 筆這個 3D 打印技術，除了有助學生能直觀地觀察立體物件並在建構對立體圖形的認知，更特別的是可以將平日限制在紙張上的平面圖形立體化，成為可以易於製作、移動、旋轉的實質模型，讓我們能有在傳統的紙筆應用中無法體會的體驗，為「造中學」提供更多的可能性。而旨在讓學生從設計的活動中建構知識的「造中學」概念，結合 3D 筆的應

用，最終可達至的是成就基於實際行動的動作型（**enactive**）學習和基於圖像的具象型（**iconic**）學習（Bruner, 1966）。而比起書中的說明、老師的展示，學生能按自己的想法親手「造」，才能讓學生用手勢和全身的感知來體驗數學。不論是學生自己用手畫出圖形的模型，或是拿在手中用不同角度觀察，甚至是隨意移動、翻轉，這些「造」的經驗都是傳統課堂無法帶來的體驗。

資助

本研究由香港研究資助局 Research Grants Council, Early Career Scheme (RGC Ref No. 24615919) 資助。

鳴謝

作者十分感謝本研究中各位參與老師的踴躍支持。

參考文獻

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Fleming, L. (2015). *Worlds of making: Best practices for establishing a makerspace for your school*. Thousand Oaks, CA: Corwin.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 439–460.
- Ng, O., & Chan, T. (2019). Learning as making: Using 3D computer-aided design to enhance the learning of shapes and space in STEM-integrated ways. *British Journal of Educational Technology*, 50(1), 294-308. <https://doi.org/10.1111/bjet.12643>
- Ng, O., & Ferrara, F. (2020). Towards a materialist vision of ‘learning as making’: the Case of 3D printing pens in school mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 925–944. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10000-9>
- Ng, O., Shi, L., & Ting, F. (2020). Exploring differences in primary students’ geometry learning outcomes in two technology-enhanced environments: Dynamic geometry and 3D printing. *International Journal of STEM Education*, 7, 50. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00244-1>.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- Renert, M. (2011). Mathematics for life: Sustainable mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 20-26.

數學教育第四十三期 (12/2020)

課程發展議會 (2017)。《數學教育學習領域課程指引補充文件：小學數學科學習內容》。
香港：教育局。

首作者電郵：winky.tsang@polyu.edu.hk

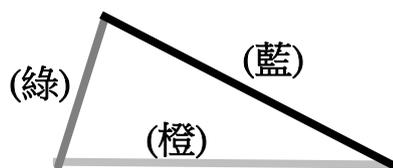
附錄

工作紙

XX 學校
工作紙 三角形的底和高

姓名：_____ 班別：_____ () 日期：_____

請如右圖所示，用 3D 打印筆畫出任意三角形，
三條邊分別要用不同顏色，並量度和記錄三角形的
底、高的長度。



<p>第一個三角形</p> <p>(完成右邊的問題後，請把三角形貼在此格內)</p>	<p>第一個三角形我用了以下三個顏色：</p> <p>顏色 A：_____</p> <p>顏色 B：_____</p> <p>顏色 C：_____</p> <p>當以顏色 A 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p> <p>當以顏色 B 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p> <p>當以顏色 C 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p>
<p>第二個三角形</p> <p>(完成右邊的問題後，請把三角形貼在此格內)</p>	<p>第二個三角形我用了以下三個顏色：</p> <p>顏色 A：_____</p> <p>顏色 B：_____</p> <p>顏色 C：_____</p> <p>當以顏色 A 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p> <p>當以顏色 B 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p> <p>當以顏色 C 的邊為底時，三角形的高是 _____ cm。</p>