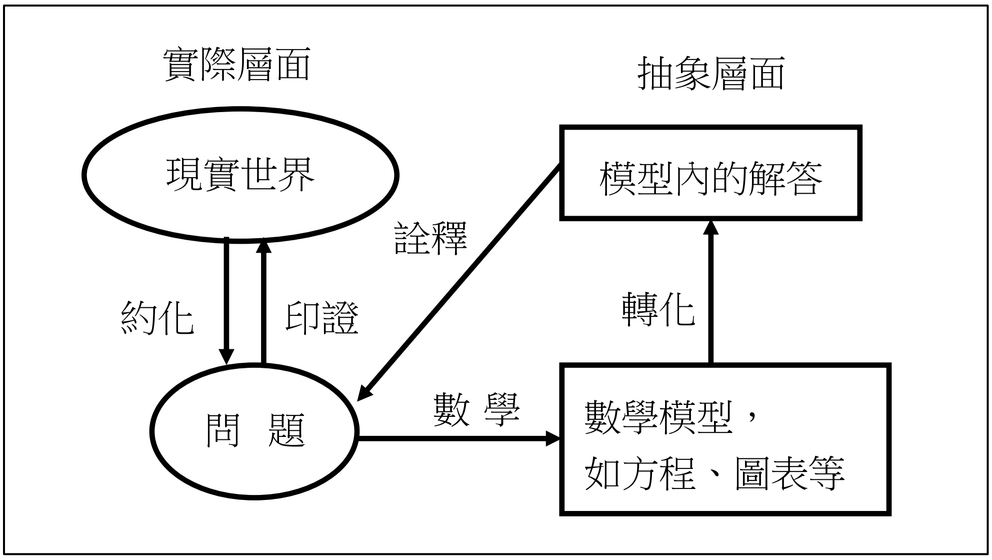
處處留心皆數學

楊志強
元朗信義中學
楊鳳興
香港真光中學
黃毅英
退休數學教育工作者

眾所周知，數學教育的一個主要任務，是引領學生由他周遭的現實生活世界到數學世界來。1989 年美國《學校數學課程與評鑑標準》[9] 便提到這點。早在 1978 年蕭文強教授的《為甚麼要學習數學》[10] 也提到數學學習和建模的密切關係。

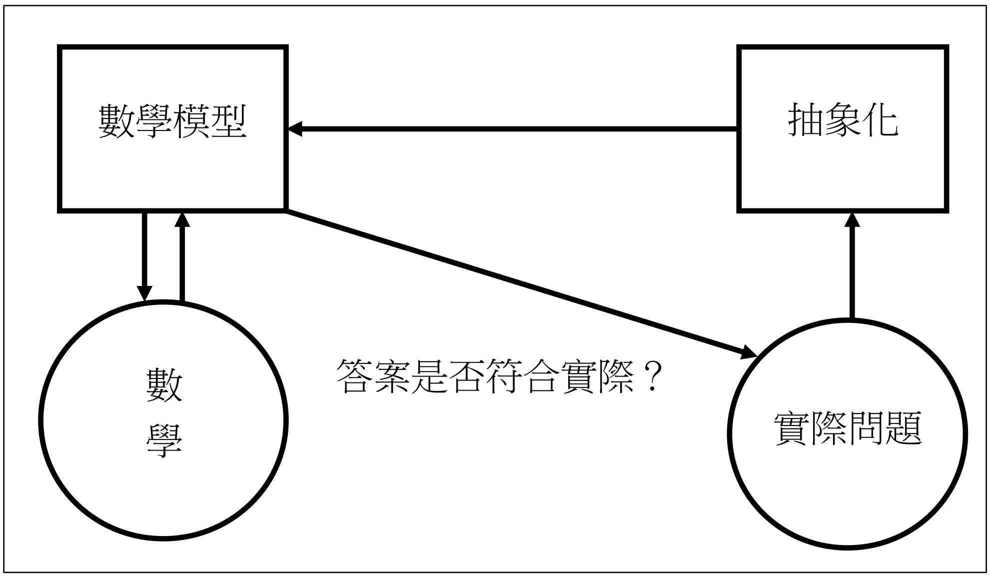


圖一：《學校數學課程與評鑑標準》中展示的數學教育目的

9 National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, Virginia, U.S.A.: Author.

10 蕭文強（1978）。《為甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。第二版（1992）香港新一代文化協會。增訂本（1995）台灣：九章出版社。

若我們夠留心，在生活中有很多現象都可以借助數學去解讀和處理[11]。〈衣食住行看數學〉一文[12]中便舉了不少，現在舉兩個亦頗為有趣的例子。



圖二：《為甚麼要學習數學》

走直線不是最快的嗎？

如果讀者中有中文大學的校友，可能遇過一個經驗。假若在崇基教育學院下課，打算乘東鐵回家，你有兩個選擇：一，沿斜路走去。二，經小石級穿過運動場（嶺南場）直接走去。如果不熟悉中文大學的，看看圖三就清楚了。

於是就有一個討論，究竟哪一條路短些？驟眼看當然第二條路線快些。但其實那是「鳥瞰圖」。實際上，第二條路線先沿石级走落「谷底」再向車站走，故此它看似直線，實為折線，那就是實際量度才能知道哪一條比較短了。

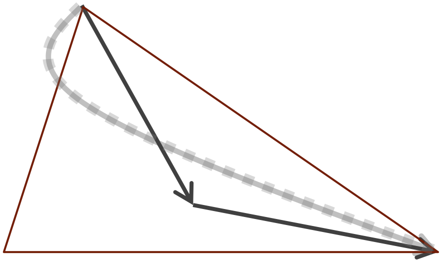
請注意我們一直用「短」而不用「快」，因為有些人（可能由於筋腱問題）走斜路比較快，一些人走石級比較快。所以我們做建模時，可能要加入不同路況（斜路，平路，石級）的速度作考慮，這也可能因人而異，所以有可能有些人走斜路快些，有人走石級會快些。

---

11 張僑平、梁玉麟、陳葉祥、黃家鳴、黃毅英、鄧國俊（2019）。我們對數學教育的看法。《學校數學通訊》，22 期，頁 6-16。

12 黃毅英。待刊。

圖三：由崇基教育學院到大學站
（背景：Google 地圖®）



圖四：看似直線實非直線

<u>香腸長度</u>

從上可見，不同的建模方法可以得出不同的結果，這不足為奇。大眾皆知的例子為自由落體，我們認為它遵循二次方程，因為假設該物體是「點質量」（point mass），也不考慮浮力、風力等。之所以足球、桌球有「旋球」（「落西」），因它們根本不是「點質量」[13]。

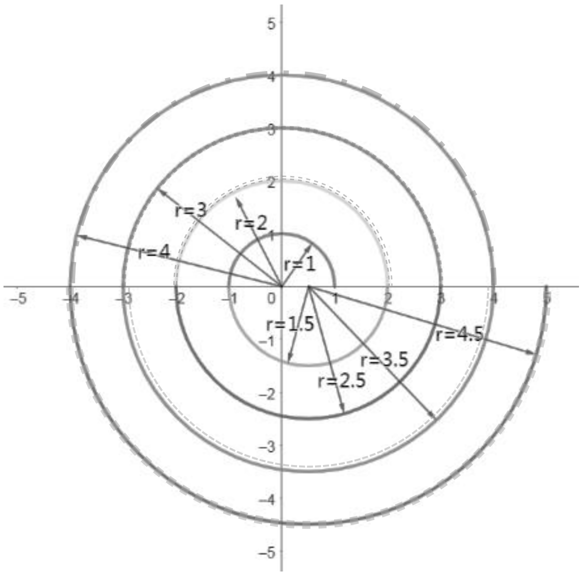
近有遇到另一例子，盤旋香腸的長度（塔香的情況也類似）。我們可以有不同建模如下：

圖五：塔香及盤旋香腸

13 張僑平、梁玉麟、陳葉祥、黃家鳴、黃毅英、鄧國俊（2019）。我們對數學教育的看法。《學校數學通訊》，22 期，頁 6-16。

「半圓形」模型

我們先做一個簡單的數學模型。假設每一段盤旋香腸都是以半圓形組成，以香腸的中軸線作為軌跡，每條中軸線的間距為 1，即向香腸半徑是 0.5，首圈的半圓形香腸圓心坐標為 (0 , 0)。可得圖六：



圖六

以點 C_i 為圓心，r_i 為半徑，C_1、C_3、C_5、C_7、⋯為實數線上 0 的位置，C_2、C_4、C_6、C_8、⋯為實數線上 0.5 的位置。則 $r_i = 0.5 + i(0.5)$

則首 n 個半圓長度總和為

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi\big(0.5 + k(0.5)\big)}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{(n)(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n(n+3)\pi}{4}$$

「極坐標」模型一

另一種建立盤旋香腸的數學模型，以 0 為極坐標之原點，假設盤旋香腸的中軸線軌跡之開始半徑為 1，角度每轉 360º，半徑增加長度 1，每條中軸線的間距皆為 1，即向香腸半徑是 0.5。

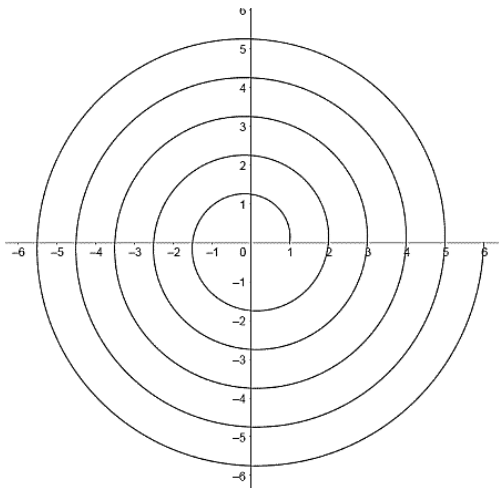
則得此曲線之極坐標方程為

$$r(\theta) = 1 + \frac{\theta}{2\pi}$$

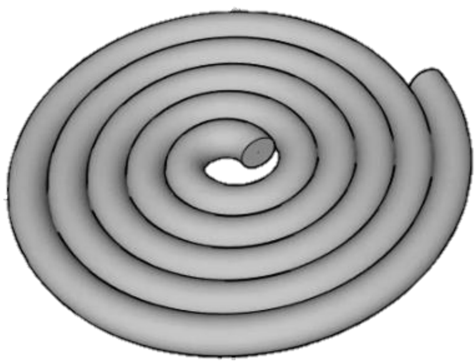
由 0 至θ 時，其長度

$$=\int_0^{\theta} 1 + \frac{\theta}{2\pi} d\theta$$

$$= \theta + \frac{\theta^2}{4\pi}$$



圖七



圖八

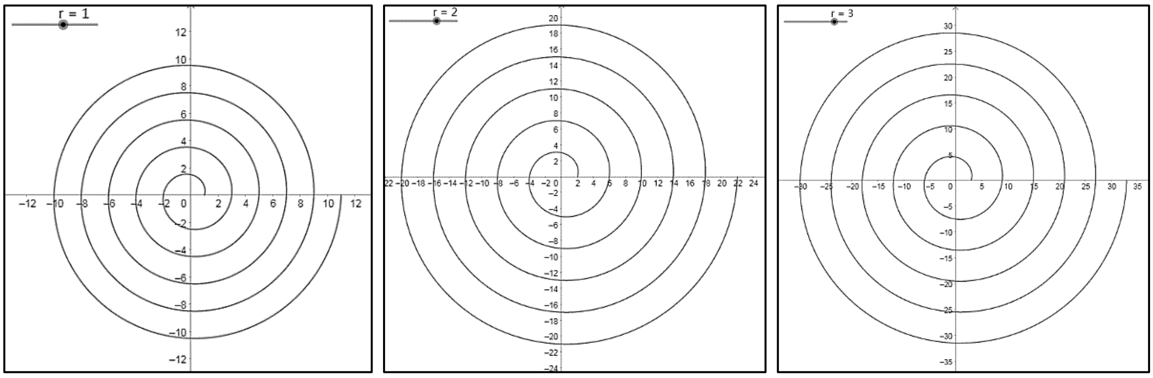
「極坐標」模型二

以上兩個模型，假設盤旋香腸半徑為 0.5。若把香腸的半徑一般化，考慮各種不同的口徑，新增一個變數 r。

以 0 為極坐標之原點，假設盤旋香腸，開始半徑為 r，角度每轉 360º，半徑增加長度 $2r$。

則得此曲線之極坐標方程為

$$R(\theta) = r\left(1 + \frac{\theta}{\pi}\right)$$



圖九

由 0 至θ 時，則其長度

$$=\int_0^{\theta}(r+\frac{r}{\pi}\theta)\,d\theta$$

$$=r\theta+\frac{r\theta^2}{2\pi}$$

假設香腸半徑為 0.5，
「極坐標」模型一即是以 (1 , 0) 作為起點，
「極坐標」模型二即是以 (0.5 , 0) 作為起點，並取 r 為 0.5。

可得以下結果

	「半圓形」模型	「極坐標」模型一	「極坐標」模型二
	以 (1 , 0) 為起點	以 (1 , 0) 為起點	以 (0.5 , 0) 為起點
$\theta=2\pi$	2.5π $(n=2)$	3π	2π
$\theta=4\pi$	7π $(n=4)$	8π	6π
$\theta=6\pi$	13.5π $(n=6)$	15π	12π
$\theta=8\pi$	22π $(n=8)$	24π	20π
長度公式	$\frac{n(n+3)\pi}{4}$	$\theta+\frac{\theta^2}{4\pi}$	$\frac{\theta}{2}+\frac{\theta^2}{4\pi}$

當然「極坐標」模型可能較「半圓形」模型仔細，但對於低年級同學，我們適宜應用「半圓形」模型，那就不難擬出一條合適的數學題，大家不妨試試看！

首作者電郵：siryeung@yahoo.com.hk